COLEGIO DE BACHILLERES

"Un proceso pertinente de formación para la vida"

Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92)

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Guía para presentar exámenes de
Recuperación o Acreditación Especial.

Cálculo diferencial e Integral II
(Versión preliminar)

Esta guía fue elaborada por la **Secretaría Académica,** a través de la **Dirección de Planeación Académica**.

Colaborador

Profr. David S. Contreras Rivas.

Colegio de Bachilleres, México.
www. cbachilleres.edu.mx
Rancho Vista Hermosa No. 105
Ex-Hacienda Coapa,
04920, México, Distrito Federal.

La presente obra fue editada en el procesador de palabras Word 2000 (Office xp).

Word 2000 es marca registrada de Microsoft Corp.

Este material se utiliza en el proceso de enseñanza - aprendizaje del Colegio de Bachilleres, institución pública de educación media superior del sistema Educativo Nacional.

ENERO 2003

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Las evaluaciones de recuperación y de acreditación especial son oportunidades que debes aprovechar para aprobar las asignaturas que, por diversas razones, reprobaste en el curso normal; pero ¡cuidado!, presentarse a un examen sin la preparación suficiente significa un fracaso seguro, es una pérdida de tiempo y un acto irresponsable que puedes evitar.

¿Cómo aumentar tu probabilidad de éxito en el examen mediante la utilización de esta guía? La respuesta es simple, observa las siguientes reglas:

- Convéncete de que tienes capacidad necesaria para acreditar la asignatura. Recuerda que fuiste capaz de ingresar al Colegio de Bachilleres mediante un examen de selección.

- Sigue al *pie de la letra* las instrucciones de la guía.

- Procura dedicarte al estudio de este material, *durante 15 días al menos, tres horas diarias continuas.*

- Contesta toda la guía: es un requisito que la presentes resuelta y en limpio al profesor aplicador antes del examen correspondiente.

PRÓLOGO

En el marco del programa de desarrollo institucional 2001 y 2006, el estudiante adquiere una especial relevancia, por lo que el Colegio de Bachilleres metropolitano se ha avocado a la elaboración de diversos materiales didácticos que apoyen al estudiante en diversos momentos del proceso de enseñanza aprendizaje.

Uno de los materiales elaborados son las guías de estudio, las cuales tienen como propósito apoyar a los estudiantes que deben presentar exámenes de recuperación o acreditación especial favoreciendo sus probabilidades de éxito.

En este contexto, la guía para presentar exámenes de recuperación y acreditación especial de **Cálculo Diferencial e Integral II** se ha elaborado con el propósito de que los estudiantes que se encuentran en situación académica irregular y que tienen necesidad de presentar exámenes en periodos extraordinarios para acreditar la asignatura cuenten con este material para llevar a cabo su preparación y, así, contar con más elementos para incrementar sus posibilidades de éxito.

Esta guía aborda en forma integral y sintética las principales temáticas establecidas en el programa de estudio; las actividades y ejercicios que se plantean son un apoyo para que el estudiante recupere los conocimientos previos, los relacione con otros más complejos y, en su caso, los aplique en el desarrollo de procedimientos y modelos matemáticos propios del cálculo. Esto permitirá que, con el estudio de la guía, continúe desarrollando y ejercitando sus habilidades de análisis y razonamiento matemático. Al final del desarrollo de las unidades la guía contiene una autoevaluación sobre los elementos esenciales de toda la unidad, para que el alumno verifique su grado de comprensión y dominio. Asimismo se incluyen algunas sugerencias para reforzar el apoyo sobre los aspectos estratégicos del tema.

En la primera unidad, ***LA INTEGRAL DEFINIDA***, se aborda de manera gráfica y algebraica el cálculo del límite de una suma, se analiza la variación de cambios acumulados, para llegar al cálculo de un área bajo una curva. Posteriormente se identifican las propiedades de la integral definida para aplicarla en la solución de diversos problemas, al final de la unidad se aborda el teorema fundamental del cálculo, así como el planteamiento de problemas en los cuales se aplican y verifican los procedimientos y modelos matemáticos estudiados en el planteamiento de la solución.

En la segunda unidad, ***LA INTEGRAL INDEFINIDA***, se abordan las propiedades de la integral indefinida, se estudia cómo determinar una función original a partir de su derivada y enseguida se calculan las integrales indefinidas de funciones algebraicas y trascendentes, para encontrar su aplicación en diferentes tipos de problemas.

Por último se proporciona una bibliografía básica en la que se pueden consultar los temas desarrollados en la guía.

En síntesis, la guía para presentar exámenes de recuperación y acreditación especial constituye un material didáctico producto del esfuerzo académico orientado a fortalecer los niveles de aprovechamiento y acreditación de los estudiantes.

UNIDAD I

LA INTEGRAL DEFINIDA

UNIDAD 1

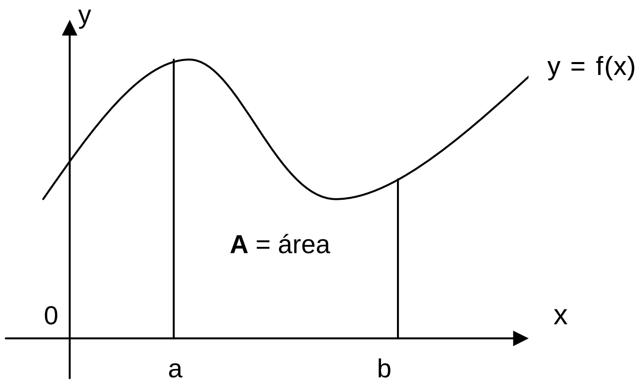
1.1 Integración Numérica

Aprendizajes
• Calcular por aproximación el límite de una suma. • Analizar la variación de la razón de cambios acumulados. • Calcular el área bajo una curva.

Arquímedes calculó el área de un círculo por medio de aproximaciones sucesivas, inscribió rectángulos dentro del círculo, calculó el área de cada rectángulo y sumó todas éstas. Después construyó rectángulos más estrechos de modo que la suma de las áreas de los rectángulos se aproximaba cada vez más al área del círculo.[1]

En esta unidad se estudiará como se determina el área que existe entre curvas, haciendo uso del cálculo integral, así como su definición y uso de las fórmulas de integración. Para lograr los aprendizajes anteriores, es recomendable repasar los siguientes temas: álgebra, funciones trigonométricas, ecuación de la recta, gráficas y derivadas.

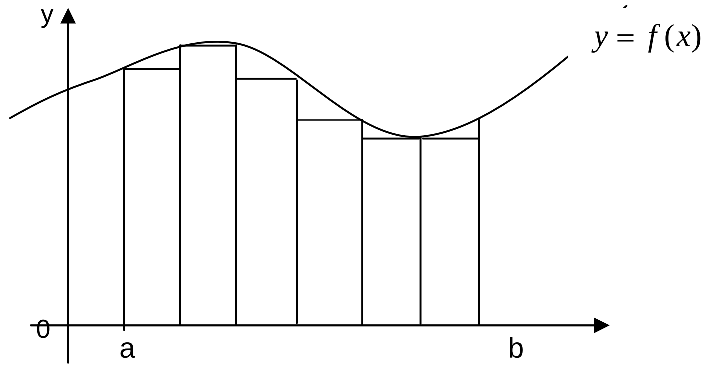
Para una función, la idea intuitiva de continuidad es que la curva que represente a la gráfica debe dibujarse con un trazo continuo, o sea, que no tenga saltos. Por ejemplo: sea **A** el área de una región limitada por el eje "x" y la gráfica de una función no negativa y = f(x), la cual está definida en un cierto intervalo cerrado [a, b], como se observa en la siguiente figura.



El cálculo del área A se lleva a cabo dividiendo dicha área en un determinado número de rectángulos, es decir, en "n" rectángulos sobre el intervalo [a, b].

[1] Bosch Giral, Carlos. Et al. "Cálculo Diferencial e Integral". p.p. 171-173

Lo anterior se representa en la gráfica siguiente:



La gráfica anterior representa las áreas de los rectángulos, la cual es una aproximación al área real. Generalmente dichas áreas se representan en unidades cuadradas (u^2).

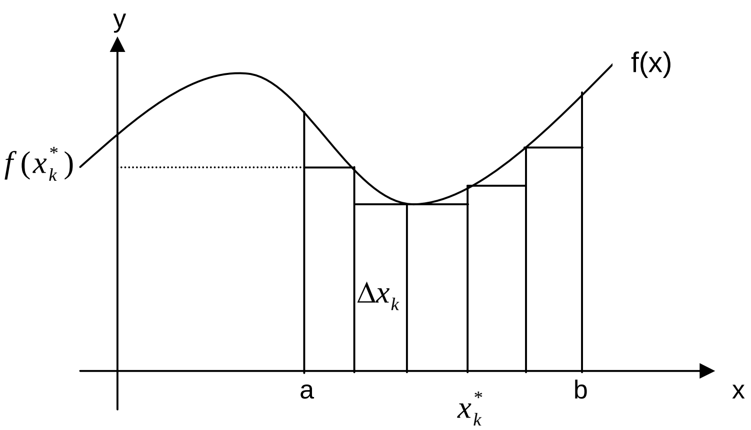
Como podrás observar, **la suma de todas las áreas de los rectángulos son una aproximación al área bajo la curva**, esta área se representa con la siguiente definición, donde el símbolo $\sum$ (sigma) indica una suma.

Definición 1.1
Sea f(x) una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y f(x) ≥0, para toda "x" en el intervalo [a, b].

Se define el área bajo la gráfica en el intervalo como:

$$A = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

De la fórmula anterior, x_k^*, Δx_k y $f(x_k^*)$, se representan en la siguiente gráfica.



Donde x_k^* representa el punto que será evaluado por la función y $f(x_k^*)$ representa la altura del rectángulo, el valor Δx representa la base de cada rectángulo.

A partir de la gráfica, se tienen las siguientes condiciones:

- Al dividir el área en “n” rectángulos, el lado derecho de cada uno éstos, está representado por x_k^*.
- La amplitud (base del rectángulo) en cada uno de ellos es igual a Δx.
- La altura del rectángulo construido bajo la curva se representa por: $f(x_k^*)$.

Para utilizar la fórmula de la definición 1.1, es conveniente realizar los siguientes pasos:

Paso 1: Divide el intervalo [a, b] en “n” subintervalos, esto es:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Paso 2: Haz que los x_k^* sean los lados derecho de cada subintervalo. Si x_0 = a, entonces para efectuar los cálculos se utiliza la siguiente fórmula:

$$x_1^* = x_0 + 1\Delta x = a + 1\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_2^* = x_0 + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_3^* = x_0 + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_k^* = x_0 + k\Delta x = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_n^* = x_0 + n\Delta x = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = a + b - a = b$$

Es importante revisar la sustitución de los valores, así como sus signos y realizar correctamente las operaciones. Por otra parte el ultimo valor de x_k^* depende del valor de “n”, por ejemplo si n = 4, entonces x_k^* debe calcularse hasta n-1, en esta caso x_3^*.

Para obtener la altura de cada uno de los rectángulos $f(x_k^*)$, se sustituyen los valores de $x_1^*, x_2^*, \ldots x_{k-1}^*$ en la función.

Las condiciones anteriores no siempre se satisfacen en la solución de problemas. Por esto es necesario generalizar los conceptos a los siguientes casos[2]:

- **La función puede ser discontinua en algunos puntos de [a, b].**
- **f(x) puede ser negativo para alguna "x" en el intervalo [a, b].**
- **Las longitudes de los subintervalos $\left[x_{k-1}, x_{\mathrm{k}}\right]$ pueden ser diferentes entre sí.**
- **El número w_k puede ser cualquier número en $\left[x_{k-1}, x_{\mathrm{k}}\right]$.**

Una partición P de un intervalo cerrado [a, b], es una descomposición cualquiera del intervalo [a, b] en subintervalos de la forma:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots [x_{n-1}, x_n]$$

Donde "n" es un número entero positivo y los x_k son números tales que:

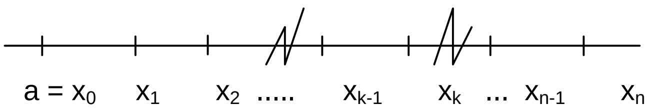
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

La longitud del k-esimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, se denota por Δx_k , es decir:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

La partición Δx contiene "n" subintervalos, donde uno de éstos es el más largo, sin embargo puede haber más de uno. La longitud del subintervalo más largo de la partición Δx se le llama **Norma de la Partición P** y se denota por $\| P \|$.

En la siguiente figura se observa una partición del intervalo [a, b].



El siguiente concepto la *suma de Riemann*, es llamado así en honor del matemático B. Riemann, y es un concepto fundamental para la *definición de la Integral definida.*

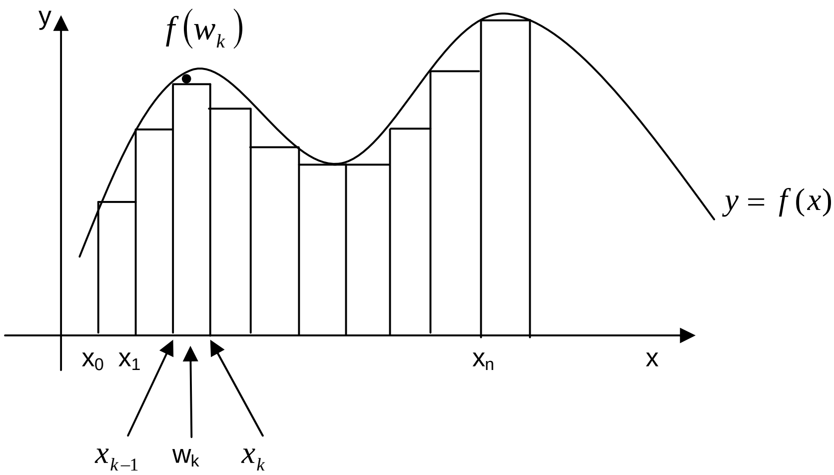
Definición 1.2
Sea f una función definida en un intervalo cerrado [a, b] y sea P una partición de [a, b]. Una suma de Riemann de f para P es cualquier expresión R_p de la forma:

$$R_p = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x_k$$

donde w_k es un número en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

[2] Cfr. Swokowski W., Earl. "Introducción al Cálculo con Geometría Analítica" p.p. 226 – 231.

La siguiente es la representación gráfica de la integral definida.



Las flechas indican donde se localizan estos puntos.

Observa en la gráfica que la altura de los rectángulos está dada por la función evaluada en el punto w_k, o sea $f(w_k)$.

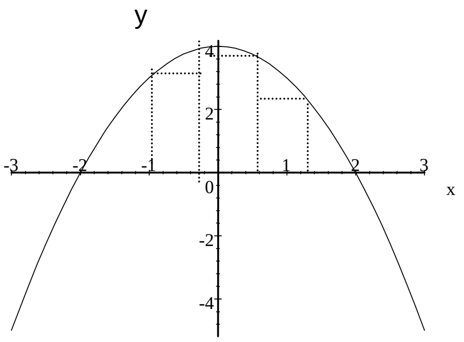
Se debe tomar en cuenta que un área es positiva si está por arriba del eje x y se le asigna un signo menos a las áreas que están por debajo del eje x.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Analiza el procedimiento con el cual se resuelven los siguientes ejemplos.

Sea la función f(x) = 4 – x^2 en el intervalo cerrado [-1, 2], con n =4.

Paso 1: Se gráfica la función y se divide el intervalo [-1, 2] en 4 subintervalos.



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \Delta x = \frac{2-(-1)}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Delta x = \frac{3}{4}$$

Paso 2: Al sustituir los datos, se obtienen los siguientes resultados:

$$x_1^* = x_0 + 1\Delta x = a + 1\left(\frac{b-a}{n}\right) = -1 + 1\left(\frac{3}{4}\right) = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

Recuerda que el valor de x_0 = a = -1

$$x_2^* = x_0 + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right) = -1 + 2\left(\frac{3}{4}\right) = -1 + \frac{6}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_3^* = x_0 + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right) = -1 + 3\left(\frac{3}{4}\right) = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

Es importante revisar la sustitución de los valores, así como sus signos y realizar correctamente las operaciones. Por otra parte, el ultimo valor de x_k^* depende del valor de “n”, en este caso n = 4, entonces x_k^* debe calcularse hasta el valor de n-1, en este ejercicio hasta x_3^*.

Paso 3: Para obtener la altura de cada uno de los rectángulos $f(x_k^*)$, se sustituyen los valores de x_1^*, x_2^* y x_3^* en la función $f(x) = 4 - x^2$

$$f(x_1^*) = 4 - (x_1^*)^2 = 4 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16} \qquad \text{recuerda que: } 4 = \frac{64}{16}$$

$$f(x_2^*) = 4 - (x_2^*)^2 = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = \frac{60}{16}$$

$$f(x_3^*) = 4 - (x_3^*)^2 = 4 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 4 - \frac{25}{16} = \frac{39}{16}$$

Paso 4: Se sustituyen los valores en la fórmula $A = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$

$$A = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x$$

$$A = \left(\frac{63}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{60}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{39}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$A = \frac{189}{64} + \frac{180}{64} + \frac{117}{64} = \frac{486}{64} = 7.59\ \text{u}^2$$

Por lo tanto el valor del área es: $A = 7.59\ u^2$.

Observa el siguiente procedimiento para resolver otro ejercicio.

Considera la función $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$, sea P una partición del intervalo cerrado [0, 6] en cinco subintervalos determinados por: $x_0 = 0$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$, $x_3 = 4.5$, $x_4 = 5$ y $x_5 = 6$.

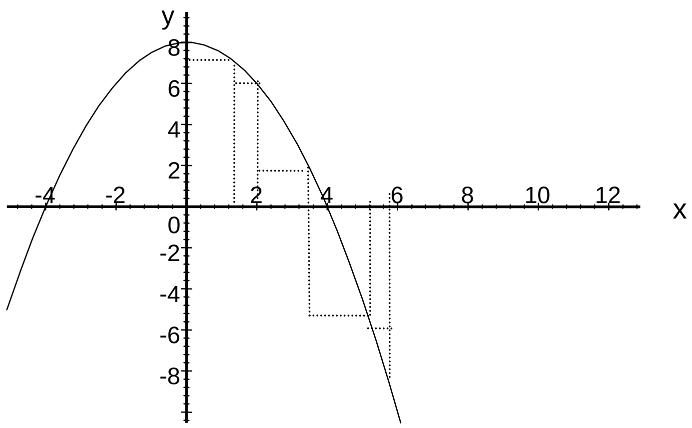
Encuentra:

a) La norma de la Partición.

b) La suma de Riemann R_p sí $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3.5$, $w_4 = 5$ y $w_5 = 5.5$

Paso 1: Se gráfica la función $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$ y se indican los puntos correspondientes a w_k.

Se indican los rectángulos de alturas $|f(w_k)|$ para k = 1, 2, 3, 4 y 5 intervalos.



Paso 2: Se determinan las bases de los rectángulos de la siguiente manera**:**

$$\Delta x_1 = 1.5 - 0 = 1.5$$
$$\Delta x_2 = 2.5 - 1.5 = 1$$

$\Delta x_3 = 4.5 - 2.5 = 2$	Ésta es la norma de la partición $\|P\|$ (Cantidad mayor de los Δx)

$$\Delta x_4 = 5 - 4.5 = 0.5$$
$$\Delta x_5 = 6 - 5 = 1$$

Paso 3: Se aplica la fórmula $R_p = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x_k$ y se calculan los $f(w_k)$, sustituyendo los valores en la función.

$$R_p = f(w_1)\Delta x_1 + f(w_2)\Delta x_2 + f(w_3)\Delta x_3 + f(w_4)\Delta x_4 + f(w_5)\Delta x_5$$

$$f(1) = 8 - \frac{1}{2}(1)^2 = 8 - \frac{1}{2} = 7.5$$

$$f(2) = 8 - \frac{1}{2}(2)^2 = 8 - \frac{4}{2} = 6$$

$$f(3.5) = 8 - \frac{1}{2}(3.5)^2 = 8 - 6.125 = 1.875$$

$$f(5) = 8 - \frac{1}{2}(5)^2 = 8 - 12.5 = -4.5$$

$$f(5.5) = 8 - \frac{1}{2}(5.5)^2 = 8 - 15.125 = -7.125$$

Sustituyendo los valores se obtiene:

$$R_p = f(1)(1.5) + f(2)(1) + f(3.5)(2) + f(5)(0.5) + f(5.5)(1)$$
$$R_p = (7.5)(1.5) + (6)(1) + (1.875)(2) + (-4.5)(0.5) + (-7.125)(1)$$

por lo tanto $R_p = 11.625\, u^2$

Ahora, tomando en cuenta el ejemplo anterior, resuelve el siguiente ejercicio.

Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ calcula la suma de Riemann R_p de la función para la partición P de [0, 5] en los cinco subintervalos determinados por:

$x_0 = 0$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3.2$, $x_4 = 4$ y $x_5 = 5$; $w_1 = 0.5$, $w_2 = 1.5$, $w_3 = 2.5$, $w_4 = 3.6$ y $w_5 = 5$

Paso 1: Elabora la gráfica la función.

Paso 2: Calcula los valores de Δx_k y obtén la norma de la partición $\|P\|$.

Paso 3: Calcula los valores $f(w_k)$.

Paso 4: Aplica la fórmula $R_p = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x_k$ y calcula la sumatoria de Riemann.

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos, y contesta lo que se solicita en cada uno de ellos.

1) Sea $f(x) = 3x - 6$ en el intervalo cerrado [2, 4] con n = 4.

I.- Calcula el área A aplicando la definición 1.1

II.- Realiza la gráfica.

2) Sea $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo cerrado [0, 1] con n = 4.

I.- Calcula el área A aplicando la definición 1.1

II.- Realiza la gráfica.

3) Sea $f(x) = -2x + 4$ en el intervalo cerrado [0, 2] con n = 8.

I.- Calcula el área A aplicando la definición 1.1

II.- Realiza la gráfica.

INSTRUCCIONES: En cada uno de los siguientes ejercicios, los números dados: (x_0, x_1, ... x_n) determinan una partición P del intervalo cerrado [a, b].

4) [0, 5], $x_0 = 0$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 2.6$, $x_3 = 3.7$, $x_4 = 4.1$ y $x_5 = 5$

I.- Calcula los $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$

II.- Calcula la norma $\|P\|$ de la partición.

5) [2, 6], $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3.7$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5.2$ y $x_5 = 6$

I.- Calcula los $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$

II.- Calcula la norma $\|P\|$ de la partición.

6) [-3, 1], $x_0 = -3$, $x_1 = -2.7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0.4$, $x_4 = 0.9$ y $x_5 = 1$

I.- Calcula los $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$

II.- Calcula la norma $\|P\|$ de la partición.

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes ejercicios y contesta lo que se solicita.

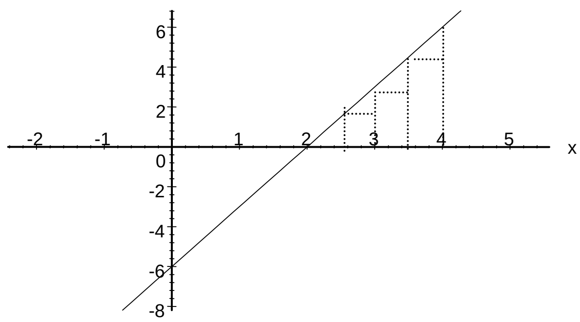
7) Aplica la definición 1.2 a la siguiente función y calcula la suma de Riemann.

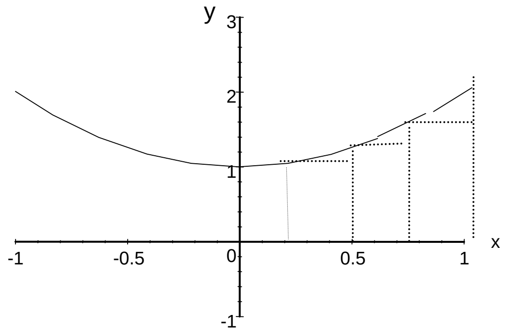
Sea $f(x) = 2x + 3$ en el intervalo cerrado [1, 5] dividido en 4 subintervalos determinados por: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$, si: $w_1 = 1.5$, $w_2 = 2.5$, $w_3 = 3.5$ y $w_4 = 4.5$

8) Aplica la definición 1.2 a la siguiente función y calcula la suma de Riemann.
Sea $f(x) = x^3$ en el intervalo cerrado [-2, 4] dividido en los cuatro subintervalos determinados por: $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, y $x_4 = 4$, si: $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$ y $w_4 = 4$

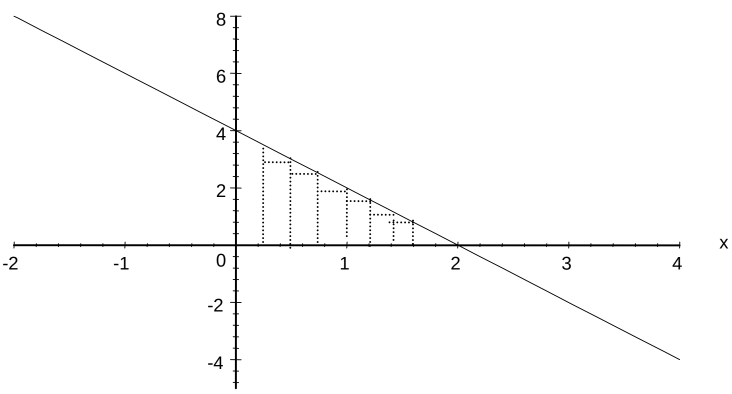
9) Aplica la definición 1.2 a la siguiente función y calcula la suma de Riemann
Sea $f(x) = 8 - \frac{x^2}{2}$ en el intervalo cerrado [0, 6] dividido en los cuatro subintervalos determinados por: $x_0 = 0$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4.5$ y $x_4 = 6$, si:
$w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 4$ y $w_4 = 5$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	I $f(x) = 3x - 6$ $[2,4] \quad n = 4, \quad a = x_0 = 2, \quad b = 4$ $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$ $x_1^* = 2 + 1\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{5}{2}$ $x_2^* = 2 + 2\left[\frac{1}{2}\right] = 3$ $x_3^* = 2 + 3\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{7}{2}$ $f\left(\frac{5}{2}\right) = 3\left(\frac{5}{2}\right) - 6 = \frac{3}{2}$ $f(3) = 3(3) - 6 = 3$ $f\left(\frac{7}{2}\right) = 3\left(\frac{7}{2}\right) - 6 = \frac{9}{2}$ $A = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (3)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}\ u^2$ II 

Número de pregunta	Respuesta correcta
2	I $f(x)=1+x^2 \quad [0,1] \quad n=4 \quad a=x_0=0 \quad b=1 \quad \Delta x=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$ $x_1^*=0+(1)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$ $x_2^*=0+2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ $x_3^*=0+3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$ $f\left(\frac{1}{4}\right)=1+\left(\frac{1}{4}\right)^2=1+\frac{1}{16}=\frac{17}{16}$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ $f\left(\frac{3}{4}\right)=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$ $A=\left(\frac{17}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{25}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{64}+\frac{5}{16}+\frac{25}{64}$ $A=\frac{62}{64}=\frac{31}{32}\ u^2$ II 

Número de pregunta	Respuesta correcta
3	I $f(x) = -2x + 4 \ [0,2] \ n = 8, \quad a = x_0 = 0, \quad b = 2, \quad \Delta x = \frac{1}{4}$ $x_1^* = 0 + 1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ $x_2^* = 0 + 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4}$ $x_3^* = 0 + 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ $x_4^* = 0 + 4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{4}$ $x_5^* = 0 + 5\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$ $x_6^* = 0 + 6\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{4}$ $x_7^* = 0 + 7\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$ $f\left(\frac{1}{4}\right) = -2\left(\frac{1}{4}\right) + 4 = \frac{14}{4}$ $f\left(\frac{2}{4}\right) = -2\left(\frac{2}{4}\right) + 4 = \frac{12}{4}$ $f\left(\frac{3}{4}\right) = -2\left(\frac{3}{4}\right) + 4 = \frac{10}{4}$ $f\left(\frac{4}{4}\right) = -2\left(\frac{4}{4}\right) + 4 = \frac{8}{4}$ $f\left(\frac{5}{4}\right) = -2\left(\frac{5}{4}\right) + 4 = \frac{6}{4}$ $f\left(\frac{6}{4}\right) = -2\left(\frac{6}{4}\right) + 4 = \frac{4}{4}$ $f\left(\frac{7}{4}\right) = -2\left(\frac{7}{4}\right) + 4 = \frac{2}{4}$

Número d pregunta	Respuesta correcta
	$A=\left(\frac{14}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{12}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{10}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$ $+\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{14}{16}+\frac{12}{16}+\frac{10}{16}+\frac{8}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}$ $A=\frac{56}{16}=\frac{7}{2}\ u^2$ II 
4	I $\Delta x_1 = 1.1-0=1.1$ $\Delta x_2 = 2.6 - 1.1 = 1.5$ $\Delta x_3 = 3.7-2.6=1.1$ $\Delta x_4 = 4.1-3.7=0.4$ $\Delta x_5 = 5-4.1=0.9$ II $\lVert P\rVert = 1.5$
5	I $\Delta x_1 = 3-2=1$ $\Delta x_2 = 3.7-3=0.7$ $\Delta x_3 = 4-3.7=0.3$ $\Delta x_4 = 5.2-4=1.2$ $\Delta x_5 = 6-5.2=0.8$ II $\lVert P\rVert = 1.2$

Número de pregunta	Respuesta correcta
	$\Delta x_1 = -2.7 - (-3) = 0.3$ $\Delta x_2 = -1 - (-2.7) = 1.7$ $\Delta x_3 = 0.4 - (-1) = 1.4$ $\Delta x_4 = 0.9 - 0.4 = 0.5$ $\Delta x_5 = 1 - 0.9 = 0.1$ II $\lVert P \rVert = 1.7$
7	$f(x) = 2x + 3 \quad [1, 5]$ $\Delta x_1 = 2 - 1 = 1 \quad w_1 = 1.5$ $\Delta x_2 = 3 - 2 = 1 \quad w_2 = 2.5$ $\Delta x_3 = 4 - 3 = 1 \quad w_3 = 3.5$ $\Delta x_4 = 5 - 4 = 1 \quad w_4 = 4.5$ $f(1.5) = 2(1.5) + 3 = 6$ $f(2.5) = 2(2.5) + 3 = 8$ $f(3.5) = 2(3.5) + 3 = 10$ $f(4.5) = 2(4.5) + 3) = 12$ $R_p = 6(1) + 8(1) + 10(1) + 12(1) = 36\ u^2$
8	$f(x) = x^3 \quad [-2, 4]$ $\Delta x_1 = 0 - (-2) = 2 \quad w_1 = -1$ $\Delta x_2 = 1 - 0 = 1 \quad w_2 = 1$ $\Delta x_3 = 3 - 1 = 2 \quad w_3 = 2$ $\Delta x_4 = 4 - 3 = 1 \quad w_4 = 4$ $f(-1) = (-1)^3 = -1$ $f(1) = (1)^3 = 1$ $f(2) = (2)^3 = 8$ $f(4) = (4)^3 = 64$ $R_p = (-1)(2) + (1)(1) + (8)(2) + (64)(1) = -2 + 1 + 16 + 64$ $R_p = 79\ u^2$

<table>
<tr><th>Número de pregunta</th><th>Respuesta correcta</th></tr>
<tr><td>9</td><td>

$f(x) = 8 - \dfrac{x^2}{2} \qquad [0, 6]$

$\Delta x_1 = 1.5 - 0 = 1.5 \qquad w_1 = 1$

$\Delta x_2 = 3 - 1.5 = 1.5 \qquad w_2 = 2$

$\Delta x_3 = 4.5 - 3 = 1.5 \qquad w_3 = 4$

$\Delta x_4 = 6 - 4.5 = 1.5 \qquad w_4 = 5$

$f(1) = 8 - \dfrac{(1)^2}{2} = \dfrac{15}{2}$

$f(2) = 8 - \dfrac{(2)^2}{2} = 6$

$f(4) = 8 - \dfrac{(4)^2}{2} = 0$

$f(5) = 8 - \dfrac{(5)^2}{2} = -\dfrac{9}{2}$

$R_p = \left(\dfrac{15}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right) + (6)\left(\dfrac{3}{2}\right) + (0)\left(\dfrac{3}{2}\right) - \left(\dfrac{9}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$R_p = \dfrac{54}{4} = \dfrac{27}{2} \; u^2$

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Sugerencias</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si te equivocaste en los reactivos 1,2 ó 3, revisa con detenimiento los ejemplos resueltos.
Si te equivocaste en los reactivos 4, 5 ó 6 revisa el libro de Swokowski, “Introducción al Cálculo con Geometría Analítica”, pág. 227.
Si te equivocaste en los reactivos 7, 8 ó 9 revisa la definición 1.2 y consulta el libro de Swokowski, p.p. 226 – 230</td></tr>
</table>

UNIDAD 1

1.2 La Integral Definida

Aprendizajes
• Identificar las propiedades de la integral definida. • Aplicar la noción de integral definida a la solución de problemas. • Aplicar el teorema fundamental del cálculo en la solución de problemas.

La integral definida puede interpretarse como el área bajo la curva y en forma equivalente como un límite. En el tema anterior se aproximó el valor del área bajo la curva mediante suma de las áreas de un conjunto de rectángulos contenidos dentro del área a determinar.

Calcular la integral definida aplicando las sumas de Riemann, es bastante tedioso y frecuentemente difícil. Para hacerlo más simple, necesitamos desarrollar algunas propiedades de la integral definida, las cuales se presentan con los siguientes teoremas.

Propiedades de la integral definida.

Teorema:

Sea f la función constante, definida por $f(x) = c$ ***para toda x en el intervalo cerrado [a, b], entonces:***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

En donde:

b: Representa el límite superior.

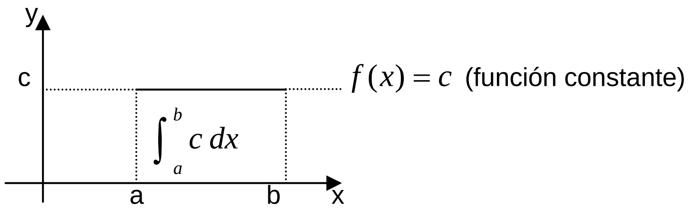
a: Representa el límite inferior.

$\int$: Se le llama signo de integración, el cual indica “suma”.

$f(x)$: Se le llama integrando.

$\int_a^b f(x)$: Se le llama integral definida, que indica el límite de una suma.

La representación gráfica de la función constante $f(x) = c$, es la siguiente:



Teorema:

> ***Sí f es integrable en $[a, \mathrm{b}]$ y k es un número real cualquiera, entonces kf es integrable en $[a, \mathrm{b}]$ y***
>
> $$\int_a^b \mathrm{k}\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

"La conclusión del teorema anterior a veces se enuncia de la siguiente forma: ***Un factor constante en el integrando se puede sacar del signo de la integral. No está permitido sacar fuera del signo de integral a expresiones en las cuales aparece la variable***"[3]

Teorema:

> ***Sí f y g son funciones integrables en $[a, \mathrm{b}]$, entonces $f \pm g$ es integrable en $[a, \mathrm{b}]$ y***
>
> $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema:

> ***Sí f es integrable en un intervalo cerrado y sí a, b y c son tres números cualesquiera en ese intervalo, entonces:***
>
> $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

[3] Cfr. Swokowski. W. Earl. "Introducción al Cálculo con Geometría Analítica". Pág. 235.

Las siguientes definiciones forman parte de las propiedades de la integral definida.

Sí a< b y f es una función integrable en el intervalo cerrado $[a, \mathrm{b}]$, entonces:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Observa que al cambiar los límites de integración, la integral cambia de signo; por otra parte si los límites de integración son iguales, resulta cero la integral porque no hay área para calcular, sino que se trata de un punto.

El siguiente teorema enuncia el hecho notable de que "G" es una antiderivada de f. Además muestra como se puede usar cualquier antiderivada para encontrar la integral definida de f. A este teorema se le conoce como: **Teorema Fundamental del Cálculo**.

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, \mathrm{b}]$

Parte I: Sí se define G como:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

para todo x en $[a, \mathrm{b}]$***, entonces G es una antiderivada de f en*** $[a, \mathrm{b}]$***.***

Parte II: Sí F es una antiderivada de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

"Este Teorema fue descubierto de manera independiente en Inglaterra por Sir Isaac Newton (1642 – 1727) y en Alemania por Gottfried Leibnitz (1646 – 1716). Es principalmente debido a este descubrimiento que se les atribuye a estos sobresalientes matemáticos la invención del Cálculo"[4]

Para aplicar el teorema fundamental del cálculo, debemos recordar que una función continua es aquella que se representa con un solo trazo o sea sin despegar el lápiz. Por otra parte, una antiderivada es una función que al derivarla ésta se convierte en la función a integrar, por ejemplo: la antiderivada de x es $\frac{x^2}{2}$, porque si derivamos $\frac{x^2}{2}$ obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(2)x^{2-1} = \frac{2}{2}x^1 = x$$

[4] Cfr. Swokowski W. Earl "Introducción al Cálculo con Geometría Analítica". Pág. 243.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Observa cuidadosamente los pasos para resolver la siguiente integral, utilizando el teorema fundamental del cálculo y haciendo uso de las propiedades de la integral definida.

Calcula la integral definida dada por la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo cerrado $[1, 2]$.

Paso 1: Dada la función se debe buscar una antiderivada de ésta, esto es:

$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x$$

si ésta función se deriva, se obtiene la función original.

Paso 2: Se sustituye la función original con el signo de integral y se escriben los límites de integración.

$$\int_1^2 \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) dx$$

Paso 3: Se aplican las propiedades de la integral definida.

$$\int_1^2 \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) dx = \int_1^2 x^3\, dx - 6\int_1^2 x^2\, dx + 9\int_1^2 x\, dx + 1\int_1^2 dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 - \left.\frac{6x^3}{3}\right|_1^2 + \left.\frac{9x^2}{2}\right|_1^2 + \left.x\right|_1^2$$

Paso 4: Se evalúan las integrales, sustituyendo el límite superior (2) menos el límite inferior (1); estos valores se sustituyen por la “x” en la ecuación anterior, de la siguiente manera:

$$\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 - \left.\frac{6x^3}{3}\right|_1^2 + \left.\frac{9x^2}{2}\right|_1^2 + \left.x\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{6(2)^3}{3} + \frac{9(2)^2}{2} + (2) - \left[\frac{1^4}{4} - \frac{6(1)^3}{3} + \frac{9(1)^2}{2} + (1)\right]$$

$$= \frac{16}{4} - \frac{48}{3} + \frac{36}{2} + 2 - \frac{1}{4} + \frac{6}{3} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{17}{4} u^2$$

Por lo tanto el valor de la integral es:

$$\int_1^2 \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) dx = \frac{17}{4}\ u^2$$

Siguiendo los pasos anteriores resuelve el siguiente ejercicio.

Calcula la integral definida, dada la función $f(x) = 3x^2 + 2x$ en el intervalo cerrado $[0, 3]$.

Paso 1: Busca una antiderivada de la función.

Paso 2: Representa la función original como una integral, sustituyendo los límites de integración.

Paso 3: Aplica las propiedades de la integral.

Paso 4: Evalúa la integral, sustituyendo primero el límite superior y restando el límite inferior.

Paso 5: Simplifica y obtén el resultado.

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes ejercicios y aplica las propiedades de la integral definida y encuentra el valor de las siguientes integrales.

1. $\int_{2}^{4} \frac{x}{2}\, dx =$

2. $\int_{1}^{3} \left(3x^{2} + 2x\right) dx =$

3. $\int_{2}^{2} x^{3}\, dx =$

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes problemas y contesta lo que se solicita, anotando el desarrollo y la solución.

4. Sea la función $f(x) = 5$ en el intervalo cerrado $[0, 2]$.

I.- Calcula el área bajo la curva.

II.- Realiza la gráfica.

4. Sea la función $f(x) = x + 5$ en el intervalo cerrado $[-2, 3]$.

I.- Calcula el área bajo la curva.

II.- Realiza la gráfica.

6. Sea la función $f(x) = x^2$, en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

I.- Calcula el área bajo la curva.

II.- Realiza la gráfica.

INSTRUCCIONES: En los siguientes reactivos aplica el **teorema fundamental del cálculo** y calcula el valor de las siguientes integrales.

7. Cada la función $f(x) = 2x - x^2$ en el intervalo cerrado $[0, 2]$.

I.- Calcula el área de la región comprendida por la función.

II.- Realiza la gráfica.

8. Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ entre x = 0 y x = 3.

I.- Calcula el área de la región comprendida por la función.

II.- Realiza la gráfica.

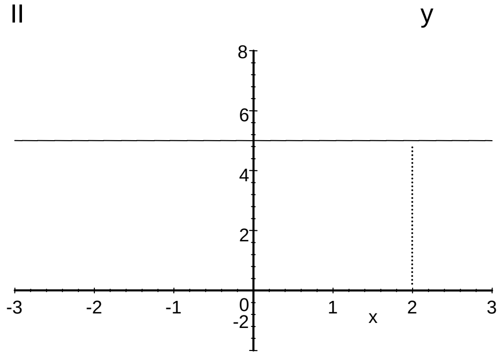
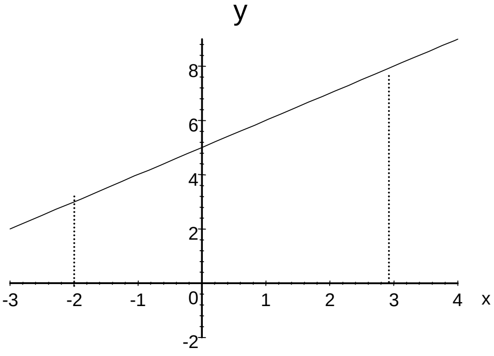
9. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, entre x = -1 y x = 2.

I.- Calcula el área de la región comprendida por la función.

II.- Realiza la gráfica.

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	$\int_2^4 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_2^4$ $= \frac{1}{4}x^2\Big\|_2^4 = \frac{1}{4}(4)^2 - \frac{1}{4}(2)^2$ $= \frac{16}{4} - \frac{4}{4} = 4 - 1 = 3\ u^2$ $A = 3\ u^2$
2	$\int_1^3 \left(3x^2 + 2x\right)\,dx = 3\int_1^3 x^2\,dx + 2\int_1^3 x\,dx =$ $= \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\Big\|_1^3 = x^3 + x^2\Big\|_1^3$ $= (3)^3 + (3)^2 - \left[(1)^3 + (1)^2\right]$ $= 27 + 9 - 1 - 1 = 34\ u^2$ $A = 34\ u^2$
3	$\int_2^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big\|_2^2 = \frac{(2)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} = 0$ $A = 0$

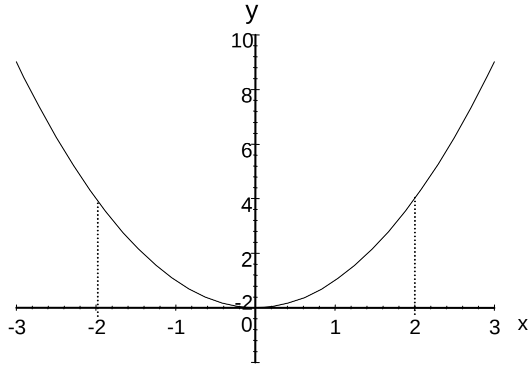
Número de pregunta	Respuesta correcta
4	I $\int_0^2 5\,dx = 5x\Big\vert_0^2 = 5(2) - 5(0) = 10 \qquad A = 10\ u^2$ II 
5	I $\int_{-2}^{3} (x+5)\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x\Big\vert_{-2}^{3}$ $= \frac{(3)^2}{2} + 5(3) - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 5(-2)\right]$ $= \frac{9}{2} + 15 - 2 + 10 = \frac{55}{2}$ $A = \frac{55}{2}\ u^2$ II 

<table>
<tr><th>Número de pregunta</th><th>Respuesta correcta</th></tr>
<tr><td>6</td><td>I

$$\int_{-2}^{2} x^2\ dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} = \frac{(2)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A = \frac{16}{3}\ u^2$$

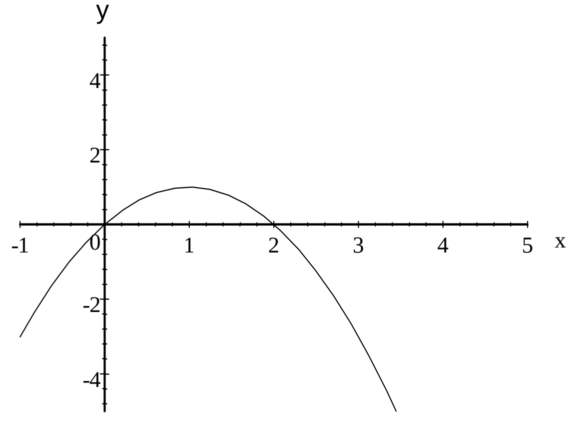
II


</td></tr>
<tr><td>7</td><td>I

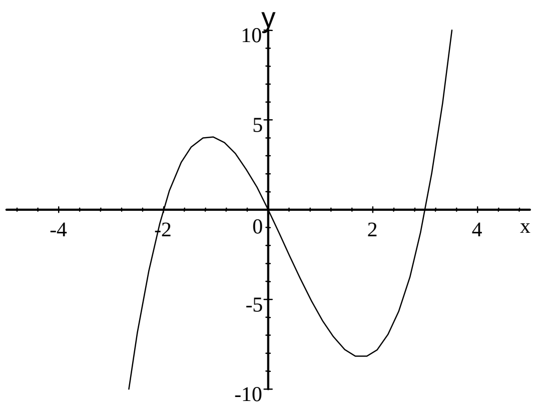
$$\int_{0}^{2} \left(2x - x^2\right)dx = x^2 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{2} = \left[(2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right] = \frac{12}{3} -$$

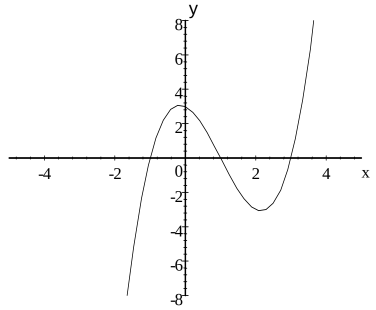
$$A = \frac{4}{3}\ u^2$$

II



}</td></tr>
</table>

Número de pregunta	Respuesta correcta
8	$\int_0^2 \left(x^3 - x^2 - 6x\right)dx = -\int_0^2 \left(x^3 - x^2 - 6x\right)dx$ $= -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_0^2$ $= -\left[\frac{(2)^4}{4} - \frac{(2)^3}{3} - \frac{6(2)^2}{2}\right] - [0]$ $= -\left[4 - \frac{8}{3} - 12\right]$ $= -4 + \frac{8}{3} + 12 = \frac{32}{3}$ $A = \frac{32}{3}\ u^2$ 

Número de pregunta	Respuesta correcta
9	I $\int_{-1}^{2}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx=$ $\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx-\int_{1}^{2}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx$ $=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{1}^{2}$ $=\frac{(1)^4}{4}-(1)^3-\frac{(1)^2}{2}+3(1)-\left[\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^3-\frac{(-1)^2}{2}+3(-1)\right]-$ $\left[\frac{(2)^4}{4}-(2)^3-\frac{(2)^2}{2}+3(2)-\left\{\frac{(1)^4}{4}-(1)^3-\frac{(1)^2}{2}+3(1)\right\}\right]$ $=\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3-\left[\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right]-\left[4-8-2+6-\left\{\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right\}\right]$ $=\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}+3-\left[4-8-2+6-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right]$ $=4-4+8+2-6+\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3$ $=13-7+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$ $=6+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$ $=\frac{25}{4}-\frac{1}{2}$ $=\frac{23}{4}$ $A=\frac{23}{4}\ u^2$ II 

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y contesta lo que se solicita, anotando el desarrollo y la solución.

Para resolver estos ejercicios cuentas con noventa minutos.

1. Dada la función $f(x) = x + 4$, en el intervalo cerrado $[0, 2]$, con n = 4.

I.- Determina el área bajo la curva.

II.- Realiza la gráfica.

2. Dada la función $f(x) = x^2$ en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, con n = 8.

I.- Determina el área bajo la curva.

II.- Realiza la gráfica.

3. Calcula la suma de Riemann para la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo cerrado $[-2, 3]$ con cinco subintervalos determinados por:

$x_0 = -2,\ \ x_1 = \frac{-1}{2},\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = \frac{7}{4},\ \ x_5 = 3$

para: $w_1 = -1,\ \ w_2 = \frac{1}{4},\ \ w_3 = \frac{1}{2},\ \ w_4 = \frac{3}{2},\ \ w_5 = \frac{5}{2}$

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y aplica las propiedades de la integral definida para evaluar las siguientes integrales.

4. Calcula el área bajo la curva de la integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{3} x\, dx =$$

5. Calcula el área bajo la curva de la integral:

$$\int_0^4 3x^2\, dx =$$

6. Calcula el área bajo la curva de la integral:

$$\int_0^1 \left(2x^3 - 5x^2 + 6\right) dx =$$

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y aplica el teorema fundamental del cálculo, mostrando el desarrollo y la solución.

7. Sea la función $f(x) = x^2 + 3$, en el intervalo cerrado $[0, 2]$.

I.- Calcula área bajo la curva.

II.- Realiza la gráfica.

8. Sea la función $f(x) = 4 - x^2$, en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

I.- Determina el área bajo la curva.

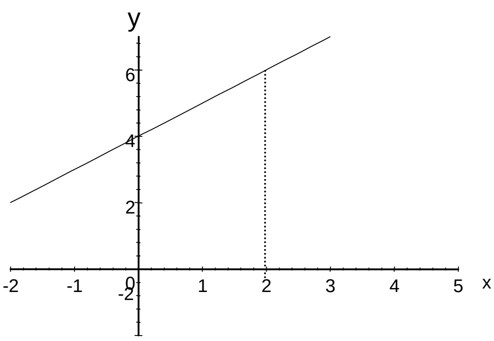
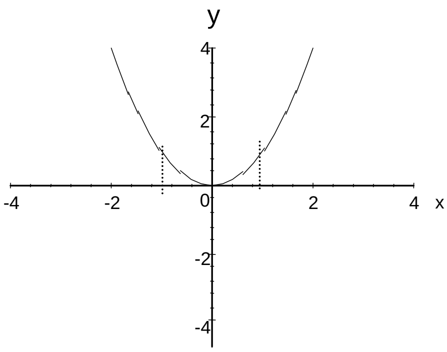
II.- Realiza la gráfica.

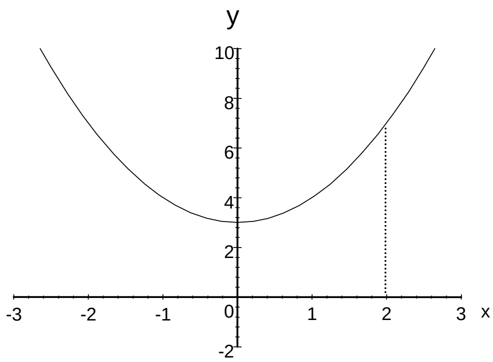
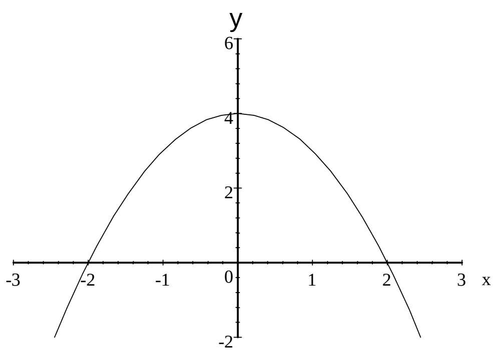
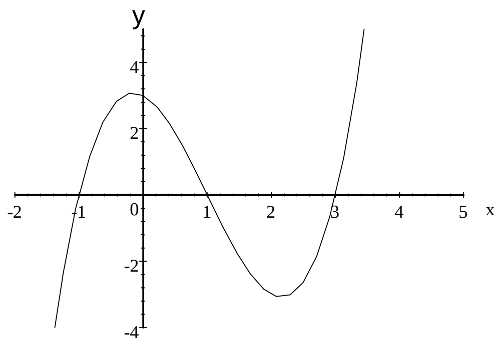
9. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, en el intervalo cerrado $[-1, 3]$.

I.- Calcula el área bajo la curva.

II.- Realiza la gráfica.

CLAVE DE RESPUESTAS

<table>
<tr><th>Número de pregunta</th><th>Respuesta correcta</th></tr>
<tr><td>1</td><td>I
$A=\frac{15}{2}\ u^2$
II

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>I
$A=\frac{7}{16}\ u^2$
II

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$R_p=16\frac{9}{32}\ u^2\approx 16.28\ u^2$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$A=\frac{1}{2}\ u^2$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$A=64\ u^2$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$A=\frac{29}{6}\ u^2$</td></tr>
</table>

Número de pregunta	Respuesta correcta
7	I $A = \dfrac{26}{3}\ u^2$ II 
8	I $A = \dfrac{32}{3}\ u^2$ II 
9	I $A = 8\ u^2$ II 

UNIDAD II

LA INTEGRAL INDEFINIDA

UNIDAD 2

2.1 La integral indefinida

Aprendizajes
• Identificar las propiedades básicas de la integral indefinida. • Determinar la función original a partir de su derivada. • Calcular la integral indefinida de funciones algebraicas. • Calcular la integral indefinida de funciones trascendentes.

En el estudio del cálculo integral es muy importante que identifiques que dada la derivada de una función, encuentres la función original, esto es, la antiderivada o primitiva de la función, a la cual le llamaremos **integral indefinida.**

Para diferenciar a la integral definida de la integral indefinida, a ésta no se le escriben los límites de integración, sino que se le agrega una **"c" que significa constante de integración, a f(x) se le llama integrando y x representa la variable de integración**, la representamos con la siguiente

Definición

Llamamos a F una antiderivada de f en el intervalo I, si $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ***en I, es decir, si F´(x) = f(x) para toda x en I, esto es:***

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad \text{sí y sólo si} \quad F'(x) = f(x)$$

Esta definición se puede interpretar de la siguiente manera: Al integrar una función f(x) obtenemos como resultado F(x); si este resultado se deriva obtendremos como resultado al integrando y además nos sirve como comprobación.

Propiedades básicas de la integral indefinida.

Observa las siguientes propiedades, las cuales debemos tomar en cuenta para el cálculo de integrales indefinidas.

- **Sí f es integrable y k es un número real cualquiera, entonces kf es integrable.**

$$\int k\ f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

- **Sean f y g dos funciones integrables, entonces:**

$$i)\ \int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$ii)\ \int\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

- **Un factor constante k puede escribirse antes del signo de integral, donde c es la constante de integración.**

$$\int k\, dx = k\int dx = k\ x + c$$

- **Regla de las potencias para integrales indefinidas.**

$$\int x^n\ dx = \left(\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} + c$$

Donde el exponente n es un número racional y n ≠ -1

En las **funciones trascendentes** se encuentran las **trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas.** Para calcular este tipo de integrales se usan las siguientes fórmulas de integración.

$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + c$$

$$\int tan\, u\, du = \ln\left|\sec u\right| + c$$

$$\int \sec^2 u\, du = tan\, u + c$$

$$\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u\, tan\, u\, du = \sec u + c$$

$$\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + c$$

$$\int \cot u\, du = \ln\left|\operatorname{sen} u\right| + c$$

$$\int \sec u\, du = \ln\left|\sec u + tan\, u\right| + c$$

$$\int \csc u\, du = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + c$$

$$\int e^u\ du = e^u\ + c$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + c$$

$$\int a^u\ du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Observa en los siguientes ejemplos cómo se aplican las propiedades de la integral indefinida.

Vamos a calcular la siguiente integral indefinida $\int 5\,x^3 dx$

Paso 1: El 5 es una constante que se puede escribir fuera de la integral.

$$\int 5\,x^3\,dx = 5\int x^3\,dx$$

Paso 2: Para encontrar una antiderivada de x^3 (o sea la primitiva) aplicamos la fórmula siguiente:

$$\int x^n\,dx = \left(\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} + c$$

o sea que:

$$5\int x^3\,dx = 5\left(\frac{1}{3+1}\right)x^{3+1} + c$$

Paso 3: Se realizan las operaciones indicadas y se obtiene finalmente el resultado.

$$\int 5\,x^3\,dx = \frac{5}{4}x^4 + c$$

Para realizar la comprobación de la integral, se deriva el resultado, esto es:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{4}x^4 + c\right) = \frac{5}{4}(4)\,x^{4-1} + \frac{d\,c}{dx}$$

Recuerda que la derivada de una constante es igual a cero. Al simplificar se obtiene al integrando.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{4}x^4 + c\right) = 5x^3$$

Nota: recuerda que al hacer mención de la antiderivada o primitiva nos estamos refiriendo a la integral indefinida.

Ahora veamos la aplicación de estas propiedades en una función polinomial.

Calcula la integral indefinida $\int (3x^5 - 4x^3 + 5x + 2)dx$ y realiza la comprobación.

Paso 1: Se escribe la integral, recordando que la suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las integrales, esto es:

$$\int (3x^5 - 4x^3 + 5x + 2)\,dx = \int 3\,x^5\,dx - \int 4\,x^3\,dx + \int 5\,x\,dx + \int 2\,dx$$

Paso 2: Los factores constantes se escriben fuera de la integral y se aplica la fórmula de una potencia, como se muestra a continuación:

$$\int \left(3x^5 - 4x^3 + 5x + 2\right)\, dx = 3\int x^5\, dx - 4\int x^3\, dx + 5\int x\, dx + 2\int dx$$

Paso 3: Se integra cada una de éstas.

$$3\int x^5 dx = 3\left(\frac{1}{5+1}\right)x^{5+1} + c_1$$

$$4\int x^3 dx = 4\left(\frac{1}{3+1}\right)x^{3+1} + c_2$$

$$5\int x\, dx = 5\left(\frac{1}{1+1}\right)x^{1+1} + c_3$$

$$2\int dx = 2x + c_4$$

Paso 4: Se sustituyen los valores, tomando en cuenta que $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$.

$$\int \left(3x^5 - 4x^3 + 5x + 2\right)\, dx = \frac{3}{6}x^6 + \frac{4}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + c$$

Paso 5: Finalmente se simplifica el resultado.

$$\int \left(3x^5 - 4x^3 + 5x + 2\right)\, dx = \frac{1}{2}x^6 + x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + c$$

Para verificar el resultado, se deriva el polinomio y se obtiene el integrando.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^6 + x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + c\right) = \frac{1}{2}(6)x^5 + 4x^3 + \frac{5}{2}(2)x + 2 + 0$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^6 + x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + c\right) = 3x^5 + 4x^3 + 5x + 2$$

Analiza los siguientes procedimientos para calcular integrales indefinidas trascendentes.

Calcula la integral indefinida $\int \operatorname{sen} x\, dx$ y realiza la comprobación.

Paso 1: Este tipo de integrales se resuelven de forma inmediata, por lo tanto:

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = \cos x + c$$

Paso 2: Se realiza la comprobación derivando el resultado.

$$\frac{d}{dx}(\cos x + c) = \frac{d}{dx}\cos x + \frac{d}{dx}c = \operatorname{sen} x + 0 = \operatorname{sen} x$$

Ahora resuelve los siguientes ejercicios, aplicando las propiedades de la integral indefinida.

a) Calcula la integral $\int \left(9x^3 + 3x^2 - 8x + 4\right)dx$ y realiza la comprobación.

b) Calcula la integral $\int \cos x \, dx$ y realiza la comprobación.

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Analiza con atención cada uno de los siguientes expresiones y calcula las integrales aplicando el método de integración respectivo.

1. $\int \left(x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 7\right) dx$

2. $\int \left(2x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 8x\right) dx$

3. $\int \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\right) dx$

4. $\int \left(x^3 + 4x^2 + 30\right) dx$

5. $\int 2x^{-3}\, dx$

6. $\int x^{\frac{3}{2}}\, dx$

7. $\int \left(x^4 + 6x^2 - 9\right) dx$

8. $\int\left(\sqrt{x^3}-2x+1\right)dx$

9. $\int(x+1)(3x-2)\,dx$

INSTRUCCIONES: Analiza las siguientes expresiones y aplicando el procedimiento adecuado, calcula las integrales trascendentes.

10. $\int(e^x+2x)\,dx$

11. $\int\frac{1}{x}dx$

12. $\int 2\sec^2 x\, dx$

13. $\int 5\cos x\, dx$

14. $\int \frac{\text{sen}\, x}{3}\, dx$

15. $\int \frac{8}{3x}\, dx$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1.	$\int\left(x^4+2x^3-x^2+x-7\right)dx=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-7x+c$
2.	$\int\left(2x^3-\frac{6}{5}x^2+8x\right)dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{5}x^3+4x^2+c$
3.	$\int\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)dx=\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+c$
4.	$\int(x^3+4x^2+30)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+30x+c$
5.	$\int 2x^{-3}\,dx=-x^{-2}+c$
6.	$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$
7.	$\int\left(x^4+6x^2-9\right)dx=\frac{1}{5}x^5+2x^3-9x+c$
8.	$\int\left(\sqrt{x}-2x+1\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+x+c$
9.	$\int(x+1)(3x-2)dx=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+c$
10.	$\int\left(e^x+2x\right)dx=e^x+x^2+c$
11.	$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c$
12.	$\int 2\sec^2 x\,dx=2\,tan\,x+c$
13.	$\int 5\cos x\,dx=5\,\mathrm{sen}\,x+c$
14.	$\int\frac{\mathrm{sen}\,x}{3}dx=-\frac{1}{3}\cos x+c$
15.	$\int\frac{8}{3x}dx=\frac{8}{3}\ln x+c$

2.2 Aplicación de la integral.

Aprendizajes
• Aplicar el método de sustitución al cálculo de integrales. • Aplicar el método de integración por partes al cálculo de la integral. • Aplicar el método de expansión en fracciones parciales al cálculo de la integral. • Aplicar las técnicas de integración en el cálculo de áreas entre gráficas de funciones. • Calcular el volumen generado por sólidos de revolución.

I.- El método de sustitución o cambio de variable
Consiste en sustituir la variable "x" por una nueva variable; veamos el siguiente:

Teorema:
Sea g una función derivable y supóngase que F es una antiderivada de f.
Entonces u = g(x).

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Observa el siguiente ejemplo donde se aplica este método.

Evalúa la siguiente integral: $\int \left(x\sqrt{x^2+4}\right)dx$

Paso 1: Se hace el cambio de variable, tomando $u = x^2 + 4$, entonces la derivada de u es

$$du = 2x\,dx$$

Paso 2: Se sustituyen estos valores en la integral, esto es:

$$\int \left(x\sqrt{x^2+4}\right)dx = \int u^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{2}$$

Observa que $du = 2x\,dx$ y en el integrando sólo se tiene $x\,dx$, entonces $\frac{du}{2} = x\,dx$.

Paso 3: Se aplican las propiedades de la integral; esto es, $\frac{1}{2}$ se escribe fuera de la integral por ser una constante.

$$\int \left(x\sqrt{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

Paso 4: Se realiza la integral, obteniendo lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+c \;=\frac{2}{6}u^{\frac{3}{2}}+c \;=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

Paso 5: Se hace el cambio de variable de $u = x^2 + 4$ y se sustituye en el resultado:

$$\int\left(x\sqrt{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

por lo tanto: $= \dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}+c$

Más adelante desarrollaremos otros ejemplos donde se aplique este método.

II. Método de integración por partes:

El método de integración por partes se basa en la integración de la fórmula derivada del producto de dos funciones.

Veamos el siguiente procedimiento para obtener la fórmula de integración por partes:

Sea u = u(x) y v = v(x), entonces:

$$D_x\left[u(x)v(x)\right] = u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$$

Integrando ambos lados de la ecuación se obtiene la siguiente expresión:

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)\,dx + \int v(x)u'(x)\,dx$$

Despejando la primera integral tenemos:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Sí $dv = v'(x)\,dx \quad y \quad du = u'(x)\,dx$, entonces la ecuación anterior se puede escribir de la forma siguiente:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

La cual es la fórmula para integrar por partes. El éxito de éste método, depende de la elección apropiada de u y dv, lo cual se consigue solamente con la práctica.

Para aplicar este método, vamos a evaluar la siguiente integral: $\int x\cos x\,dx$

Paso 1: Se escribe $x\ \cos x\,dx$ como $u\,dv$; entonces $u = x \quad y \quad du = dx$

Paso 2: Si $dv = \cos x\,dx$, entonces, para encontrar v se integran ambos lados, obteniendo:

$$\int dv = \int \cos x\,dx \text{ , entonces}$$

$$v = \operatorname{sen} x + c$$

Paso 3: Los valores de $u,\ du,\ dv\ \ y\ \ v$ se sustituyen en la fórmula, quedando de la siguiente manera:

$$\int x\cos x\,dx = x(\operatorname{sen} x) - \int(\operatorname{sen} x)\,dx$$

La integral de $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$, sustituyendo este resultado en la integral anterior, se obtiene el resultado.

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + c$$

Recuerda que las constantes de integración están incluidas en "c".

III. Método de integración de funciones racionales (Método de expansión en fracciones parciales).

Una función racional es, por definición, el cociente de dos polinomios, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}, \quad h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

Teóricamente cualquier expresión racional $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se puede expresar como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado menor o igual a dos.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + ... + F_r$$

La suma de $F_1 + F_2 + ... + F_r$ es la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y cada F_k se llama fracción parcial.

Observa con detenimiento los siguientes pasos para obtener la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$ [5]

1. Si el grado de f(x) no es menor que el de g(x), se realiza la división.
2. Expresar g(x) como un producto de factores lineales $px+q$ o formas cuadráticas irreducibles ax^2+bx+c y agrupar los factores repetidos para que g(x) quede expresado como un producto de factores distintos de la forma $(px+q)^m$ o bien $(ax^2+bx+c)^n$ con m y n enteros no negativos.
3. Aplicar las siguientes reglas:

a) Por cada factor de la forma $(px+q)^m$ con $m \geq 1$, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de m fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{px+q}+\frac{A_2}{(px+q)^2}+.....+\frac{A_m}{(px+q)^m}$$

Donde cada numerador A_k es un número real.

b) Por cada factor $(ax^2+bx+c)^n$, con $n \geq 1$, donde ax^2+bx+c es Irreducible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de *n* fracciones parciales de la forma:

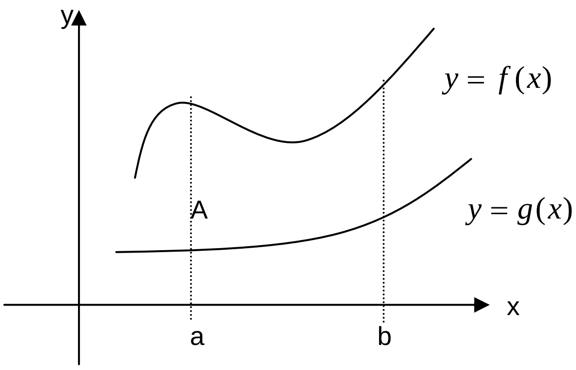
$$\frac{A_1x+b_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+b_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{A_nx+b_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Donde todos los A_k y b_k son números reales.

[5]Cfr. Swokowski W., Earl. "Introducción al Cálculo con Geometría Analítica". p.p. 476-478.

Cálculo de áreas entre gráficas de funciones[6]

Consideremos las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ con ambas funciones sobre el intervalo $a \le x \le b$. Ellas determinan la región que se muestra a continuación:



Observa que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. El área de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ esta dada por $\int_a^b f(x)\,dx$. Si g es otra función y $f(x) \ge g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces el área A de la región acotada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, $x = a$ y $x = b$, está dada por

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Es importante que conozcas que **para encontrar los puntos de intersección, estos se calculan resolviendo simultáneamente las ecuaciones; es decir se igualan las dos funciones y se resuelven éstas, encontrando los límites de integración.**

Sólidos de revolución.

Si una región plana situada completamente a un lado de una línea fija en su plano, gira alrededor de ésta, entonces se genera un **Sólido de revolución**. La recta fija se llama eje del sólido de revolución. Por lo tanto el volumen del sólido de revolución se define de la siguiente manera:

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea R la región acotada por la gráfica de f, el eje "x" y las rectas x=a y x=b. El volumen V del sólido de revolución generado al girar R alrededor del eje "x" es:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2\,dx$$

[6] Purcell, Edwin, J. Varberg, Dale. "Cálculo Diferencial e Integral", p.p. 284-287.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Observa con detenimiento los siguientes ejemplos, donde se aplican los métodos de integración y realiza los ejercicios propuestos.

Evaluaremos la siguiente integral indefinida aplicando el método de sustitución.

$$\int \left(x^3 \sqrt{x^4+12}\right) dx$$

Paso 1: Se toma como $u = x^4 + 12$, entonces la derivada de u es $du = (4x^3 + 0)\,dx$, recuerda que la derivada de una constante es cero.

Paso 2: Observa que en la integral están x^3 y dx y al realizar el cambio de variable $du = 4x^3\,dx$, queda de la siguiente forma:

$$\frac{du}{4} = x^3 dx$$

Paso 3: Se sustituyen los valores de u y du en la integral, obteniendo de esta manera el cambio de variable.

$$\int \left(x^3 \sqrt{x^4+12}\right) dx = \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{4}$$

Paso 4: Cómo $\frac{1}{4}$ es una constante, se aplican las propiedades de la integral y se coloca fuera de dicha integral este valor, esto es:

$$\int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

Paso 5: Se realiza la integral.

$$\int \left(x^3 \sqrt{x^4+12}\right) dx = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + c \;= \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + c \;= \frac{2}{12}\left[u^{\frac{3}{2}}\right] + c$$

Paso 6: Se sustituye el valor que se tomó como $u = x^4 + 12$ y se obtiene el resultado de dicha integral, esto es:

$$\int \left(x^3 \sqrt{x^4+12}\right) dx = \frac{1}{6}\left(x^4+12\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+12\right)^3} + c$$

Ejercita tus conocimientos y aplica este método de sustitución en la siguiente integral.

$$\int \left(3x\sqrt{2-x^2}\right)dx$$

Vamos a resolver un ejemplo aplicando el método de integración por partes en la siguiente integral.

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

Paso 1: Se toma como $u = x^2$; la derivada de u es $du = 2x\,dx$; de esta manera $dv = \operatorname{sen} x$,

entonces v es la integral de $\operatorname{sen} x$

$$v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c_1$$

Paso 2: Con estos valores se sustituyen en la fórmula $\int udv = uv - \int vdu$.

$$\int x^2 senx\, dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)2x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

Paso 3: Observa que la integral del lado derecho otra vez se tiene que realizar por partes, entonces se hacen los siguientes cambios:

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = \cos x dx \qquad v = senx + c_2$$

De esta manera, la integral $\int x\cos x\, dx$, queda de la siguiente manera:

$$\int x\cos x\, dx = xsenx - \int senx\, dx \quad = xsenx + \cos x + c_3$$

Nota: es importante que Las constantes c_1, c_2, y c_3 se incluyen al final del resultado de la integral para no crear confusión con dichas constantes.

Paso 4: Sustituyendo los valores, se obtiene el resultado de la integral.

$$\int x^2 senx\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x\, dx \quad = -x^2 \cos x + 2[xsenx + \cos x] + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2xsenx + 2\cos x + c$$

Ejercita tus conocimientos y calcula la siguiente integral: $\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx$

El siguiente ejercicio se resuelve aplicando el *método de expansión en fracciones parciales*.

$$\int \frac{5x+3}{x^3+2x^2-3x}\,dx$$

Paso 1: Se factoriza el denominador, quedando de la siguiente forma.

$$x^3+2x^2-3x = x(x^2+2x-3) = x(x+3)(x-1)$$

Paso 2: Al factor x le corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{A}{x}$, de la misma forma, a los factores $(x+3)\, y\, (x-1)$ les corresponden fracciones parciales de la forma: $\frac{B}{x+3}$; $\frac{C}{x-1}$, respectivamente; la descomposición en fracciones parciales tiene la siguiente forma:

$$\frac{5x+3}{x^3+2x^2-3x} = \frac{5x+3}{x(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

Paso 3: Se multiplica por $x(x+3)(x-1)$ ambos lados de la igualdad y se obtiene lo siguiente:

$$\frac{(5x+3)[x(x+3)(x-1)]}{x(x+3)(x-1)} = \frac{Ax(x+3)(x-1)}{x} + \frac{bx(x+3)(x-1)}{x+3} + \frac{Cx(x+3)(x-1)}{x-1}$$

Simplificando tenemos que:

$$5x+3 = A(x+3)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+3) \qquad (*) \text{ ver paso 4}$$

Paso 4: Los valores de A, B y C pueden encontrarse sustituyendo por "x" valores que hagan que los factores sean cero en la ecuación ($*$), es decir, en este caso, "x" toma los valores de: 0, -3 y +1.

Para: $x = 0$

$$5(0)+3 = A(0+3)(0-1)+B(0)(0-1)+C(0)(0+3)$$

Simplificando se obtiene:

$$A = -1$$

Para: $x = -3$

$$5(-3)+3 = A(-3+3)(-3-1)+B(-3)(-3-1)+C(-3)(-3+3)$$

Simplificando se obtiene:

$$B = 1$$

Para: $x = 1$

$$5(1)+3 = A(1+3)(1-1)+B(1)(1-1)+C(1)(1+3)$$

Simplificando se obtiene:

$$C = 2$$

Paso 5: La descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{5x+3}{x(x+3)(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

Paso 6: Se integra y la suma de las constantes, la denotamos como "c"; de esta forma obtenemos el resultado final.

$$\int \frac{5x+3}{x^3+2x^2-3x}\,dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2dx}{x-1}$$

$$= -\ln x + \ln\ |x+3| + 2\ln\ |x-1| + c$$

Aplica tus conocimientos y realiza la siguiente integral, aplicando el método de fracciones parciales.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}\,dx$$

Observa como se calcula el área entre dos curvas en el siguiente ejemplo:

Encontraremos el área de la región acotada por las gráficas $y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 = 0$ y realizaremos la gráfica.

Paso 1: Una forma de encontrar los límites de integración es realizando la gráfica. La otra forma es igualando las dos funciones. Para este ejemplo, encontraremos los límites de integración de las dos formas.

Sea $y + x^2 = 6$ Ecuación (1)

$y + 2x - 3 = 0$ Ecuación (2)

Despejando "y" de la ecuación (1) y (2), tenemos que:

De la ecuación (1)

$y = -x^2 + 6$ Ecuación (3)

De la ecuación (2)

$y = -2x + 3$ Ecuación (4)

Igualando las ecuaciones (3) y (4), se tiene:

$$-x^2 + 6 = -2x + 3$$

$$x^2 - 2x + 3 - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Factorizando esta ecuación:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor:

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Por lo tanto, los límites de integración es: $[-1, 3]$

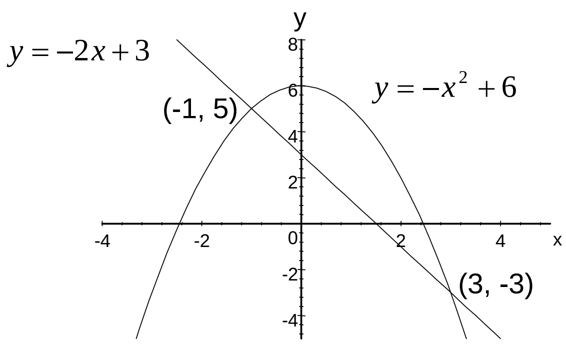
La otra forma es realizando la gráfica. De la ecuación (1) se despeja a la incógnita “y”, y se elabora una tabla dando valores a “x” para encontrar el respectivo valor de “y”.

x	$y=-x+6$	(x, y)
-3	$-(-3)^2 + 6 = -9 + 6 = -3$	(-3, -3)
-2	$-(-2)^2 + 6 = -4+6 = 2$	(-2, 2)
-1	$\mathbf{-(-1)^2 + 6 = -1 +6 = 5}$	**(-1, 5)**
0	$-(0)^2 + 6 = 6$	(0, 6)
1	$-(1)^2 + 6 = -1 +6 = 5$	(1, 5)
2	$-(2)^2 + 6 = -4 +6 = 2$	(2, 2)
3	$\mathbf{-(3)^2 + 6 = -9 + 6 = -3}$	**(3, -3)**

De la ecuación (2) se despeja la incógnita “y” y se elabora otra tabla dando valores a “x” para encontrar su respectivo valor de “y”.

x	$y=-2x+3$	(x, y)
-3	-2(-3) + 3 = 6 + 3 = 9	(-3, 9)
-2	-2(-2) + 3 = 4 + 3 = 7	(-2, 7)
-1	**-2(-1) + 3 = 2 + 3 = 5**	**(-1, 5)**
0	-2(0) + 3 = 0 + 3 = 3	(0, 3)
1	-2(1) + 3 = - 2 + 3 = 1	(1, 1)
2	-2(2) + 3 = -4 + 3 = -1	(2, -1)
3	**-2(3) + 3 = -6 + 3 = -3**	**(3, -3)**

Paso 2: Se realiza la gráfica con los valores obtenidos de las dos tablas.



Como puedes observar en la gráfica los puntos donde se intersectan las dos gráficas son (-1, 5) y (3, -3), esto nos indica que $x=-1$ y $x=3$ son los límites de integración.

Paso 3: La gráfica que esta por encima de la región es la que tiene por ecuación $y=-x^2+6$, como se observa en la gráfica, y la que está por debajo del área a determinar es la que tiene por ecuación $y=-2x+3$. Esto nos indica que el área A entre las curvas está dada por la diferencia de las funciones, es decir, la ecuación $y=-x^2+6$ menos la ecuación $y=-2x+3$, esto se representa por la integral siguiente:

$$\int_{-1}^{3}\left[\left(-x^2+6\right)-\left(-2x+3\right)\right]dx$$

Paso 4: Se calcula la integral anterior.

$$\int_{-1}^{3}\left[\left(-x^2+6\right)-\left(-2x+3\right)\right]dx=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x\Big|_{-1}^{3}$$

$$=-\frac{(3)^3}{3}+(3)^2+3(3)-\left[\frac{-(-1)^3}{3}+(-1)^2+3(-19\right]$$

$$=-9+9+9-\left[\frac{1}{3}+1-3\right]$$

$$=9-\frac{1}{3}-1+3 \quad =11-\frac{1}{3} \quad =\frac{32}{3}u^2$$

Por lo tanto el área es: $A=\frac{32}{3}\ u^2$

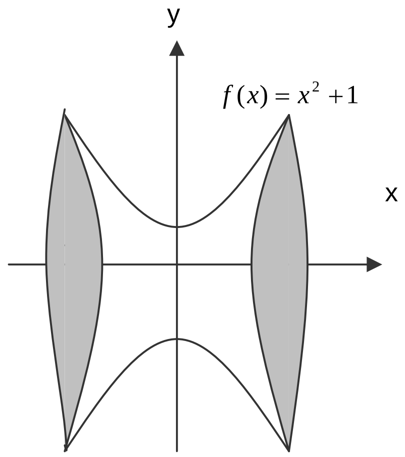
Ejercita tus conocimientos y calcula el área entre las curvas de las siguientes funciones: $f(x)=2x-x^2$ y $g(x)=x^4$, realiza las gráficas correspondientes.

UNIDAD 2

Para calcular el volumen de un sólido revisa con atención el siguiente ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 + 1$, observa como se calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar la región bajo la gráfica de f(x) con x = -1 y x = 1 alrededor del eje “x”.

Paso 1: Se gráfica la función $f(x) = x^2 + 1$, en el intervalo que se indica.



Paso 2: Se aplica la fórmula para encontrar el volumen, en el intervalo $[-1, 1]$.

$$V = \int_{-1}^{1} \pi[x^2 + 1]dx = \int_{-1}^{1} \pi[x^4 + 2x^2 + 1]dx$$

Paso 3: Se integra y se evalúa dicha integral, obteniendo de esta manera el volumen del sólido de revolución.

$$V = \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$V = \pi\left\{\left[\frac{(1)^5}{5} + \frac{2}{3}(1)^3 + (1)\right] - \left[\frac{(-1)^5}{5} + \frac{2}{3}(-1)^3 + (-1)\right]\right\}$$

$$V = \pi\left\{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 - \left[-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right]\right\}$$

$$V = \pi\left\{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right\}$$

Por lo tanto el volumen del sólido de revolución es: $V = \frac{56}{15}\pi$

Ejercita tus conocimientos y calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar la región bajo la gráfica de $f(x)=2$, en el intervalo $[0,3]$. Realiza la gráfica.

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y resuelve lo que se pide.

I.- Aplica el método de sustitución y evalúa las siguientes integrales, escribe tu desarrollo y la solución.

1. $\int x^2\left(x^3-5\right)^4 dx =$

2. $\int (3x+9)^6 dx =$

3. $\int \frac{e^x}{1+2e^x} dx =$

4. $\int (x-1)^5 \, dx =$

5. $\int \operatorname{sen}^3 x \; \cos x \, dx =$

6. $\int \frac{3x}{x^2-9} \, dx =$

II.- Aplica el método de integración por partes y calcula las siguientes integrales.

7. $\int x \operatorname{sen} x \, dx =$

8. $\int \ln x \, dx =$

9. $\int x^2 e^x dx =$

10. $\int 4x \cos x \, dx =$

III.- Aplica el método de fracciones parciales a las siguientes integrales.

11. $\int \frac{5}{x^2 + 2x} dx =$

12. $\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 4} dx =$

13. $\int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x} dx =$

IV.- Calcula el área entre las gráficas de las funciones que se indican y realiza la gráfica correspondiente.

14. $f(x) = 2x - x^2$, $g(x) = x^4$

15. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 5$

16. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

V.- Calcula el volumen generado por el sólido de revolución alrededor del eje “x”, dado en cada una de las siguientes funciones, en el intervalo que se indica. Realiza la gráfica correspondiente.

17. $f(x) = \sqrt{x}$ $[0, 2]$

18. $g(t) = t^2 \quad [-1, 1]$

19. $h(t) = t \quad [0, 4]$

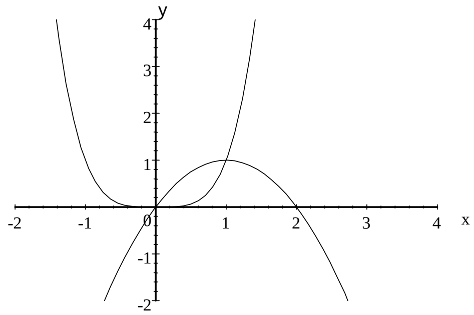
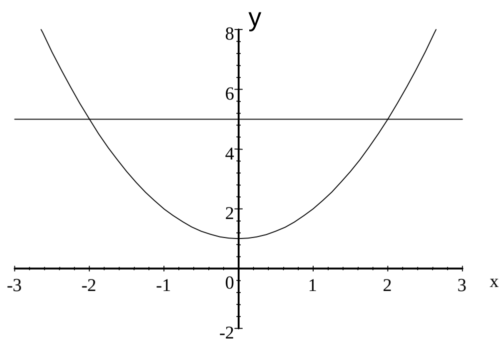
20. $y = x + 3 \quad [-3, 0]$

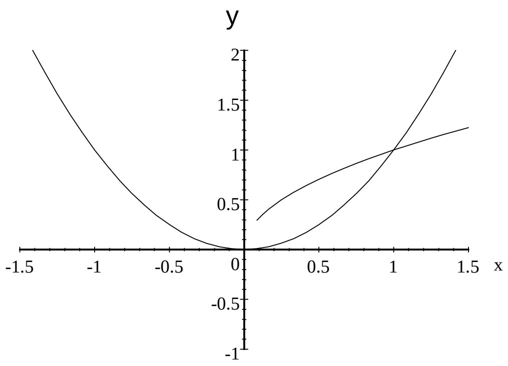
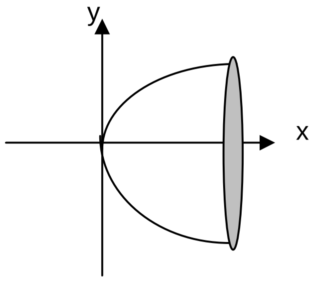
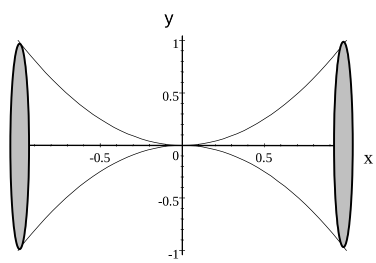
TABLA DE COMPROBACIÓN

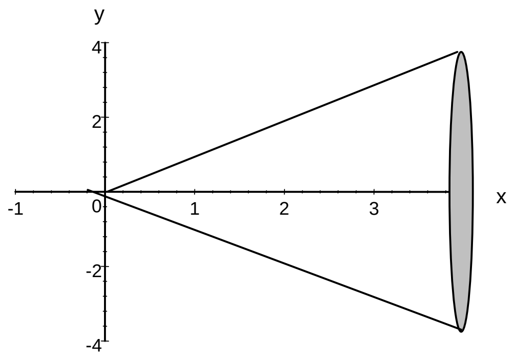
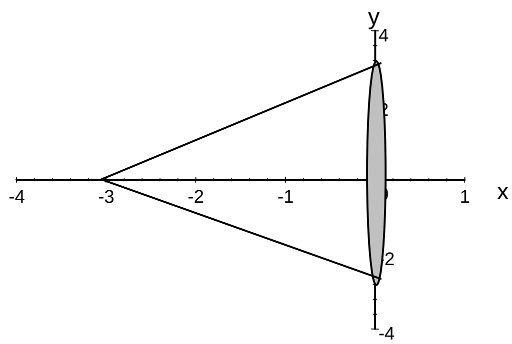
Número de pregunta	Respuesta correcta
1	$u = x^3 - 5 \quad du = 3x^2 dx \quad \frac{du}{3} = x^2 dx$ $\int x^2 (x^3 - 5)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3 - 5)^5 + c$
2	$u = 3x + 9 \quad du = 3dx \quad \frac{du}{3} = dx$ $\int (3x+9)^6 dx = \frac{1}{21}(3x+9)^7 + c$
3	$u = 1 + 2e^x \quad du = 2e^x dx \quad \frac{du}{2} = e^x dx$ $\int \frac{e^x}{1+2e^x} dx = \frac{1}{2} \ln\|1 + 2e^x\| + c$
4	$u = x - 1 \quad du = dx$ $\int (x-1)^5 dx = \frac{1}{6}(x-1)^6 + c$
5	$u = \operatorname{sen} x \quad du = \cos x\, dx$ $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + c$
6	$u = x^2 - 9 \quad du = 2x\, dx \quad \frac{du}{2} = x\, dx$ $\int \frac{3x}{x^2 - 9} dx = \frac{3}{2} \ln\|x^2 - 9\| + c$
7	$u = x \quad du = dx \quad dv = \operatorname{sen} x\, dx \quad v = -\cos x$ $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \cos x + c$
8	$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x$ $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + c$

Número de pregunta	Respuesta correcta
9	$u = x^2 \quad du = 2xdx \quad dv = e^x dx \quad v = e^x$ $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x\, dx$ La integral del lado derecho se realiza otra vez por partes, esto es: $u_1 = 2x \quad du_1 = 2dx \quad dv_1 = e^x \quad v_1 = e^x$ $\int x^2 e^x dx = e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + c$
10	$u = 4x \quad du = 4dx \quad dv = \cos x\, dx \quad v = \operatorname{sen} x$ $\int 4x \cos x\, dx = 4x \operatorname{sen} x + 4\cos x + c$
11	$A = \frac{5}{2} \quad B = -\frac{5}{2}$ $\int \frac{5}{x^2 + 2x} dx = \frac{5}{2} \ln\lvert x\rvert - \frac{5}{2} \ln\lvert x + 2\rvert + c$
12	$A = 3 \quad B = -2$ $\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 4} dx = 3\ln\lvert x + 4\rvert - 2\ln\lvert x - 1\rvert + c$
13	$A = 2 \quad B = 1 \quad C = -1$ $\int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x} dx = 2\ln\lvert x\rvert + \ln\lvert x - 2\rvert - \ln\lvert x + 1\rvert + c$

UNIDAD 2

Número de pregunta	Respuesta correcta
14	$f(x)=2x-x^2 \quad g(x)=x^4 \quad [0,1]$ $\int_0^1 \left[\left(2x-x^2\right)-(x^4)\right]dx=\int_0^1 \left(2x-x^2-x^4\right)dx=\frac{7}{15}u^2$ 
15	$f(x)=x^2+1 \quad g(x)=5 \quad [-2,2]$ $\int_{-2}^{2} \left[5-\left(x^2+1\right)\right]dx=\int_{-2}^{2} \left(-x^2+4\right)dx=\frac{32}{3}u^2$ 

<table>
<tr><th>Número de pregunta</th><th>Respuesta correcta</th></tr>
<tr><td>16.</td><td>$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad [0,1]$
$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right)dx = \frac{1}{3}u^2$
</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>$f(x) = \sqrt{x} \qquad [0,2]$
$V = \int_0^2 \pi \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 x\, dx = 2\pi \; u^3$
</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>$g(t) = t^2 \qquad [-1,1] \qquad V = \int_{-1}^{1} \pi\left(t^2\right)^2 dt = \frac{2}{5}\pi \; u^3$
</td></tr>
</table>

Número de pregunta	Respuesta correcta
	$h(t)=t \qquad [0,4] \qquad V=\int_0^4 \pi(t)^2\,dt=\frac{64}{3}\pi\ u^3$ 
20.	$y=x+3 \qquad [-3,0] \qquad V=\int_{-3}^{0} \pi(x+3)^2\,dx=9\pi\ u^3$ 

Sugerencias
Si te equivocaste en los reactivos del 1 al 6, revisa los ejercicios resueltos y consulta el libro de Edwin J. Purcell y Dale Varberg. “Cálculo Diferencial e Integral”, p.p. 270-273. Si te equivocaste en los reactivos del 7 al 13, revisa los ejercicios resueltos y consulta el libro de Earl W. Swokowski. “Cálculo con Geometría Analítica”, p.p. 460-485. Si te equivocaste en los reactivos del 14 al 20 revisas los ejercicios resueltos y consulta el libro de Edwin J. Purcell y Dale Varberg. “Cálculo Diferencial e Integral”, p.p. 281-301. Recuerda que $\int \frac{du}{u}=\ln u+c$

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y contesta lo que se solicita, anotando el desarrollo y la solución.

Para resolver estos ejercicios cuentas con noventa minutos.

I.- Aplica las propiedades de la integral indefinida y evalúa la siguiente integral.

1. $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 6x - 7\right) dx$

2. Encuentra una antiderivada (primitiva) de la función: $f(x) = 5x^3 + 2$

3. Evalúa la siguiente integral indefinida.

$\int (x+1)(x-1)\, dx$

4. Evalúa la siguiente integral indefinida.

$$\int tan\, 3x\, dx$$

II.- **INSTRUCCIONES:** Aplica el método de sustitución y evalúa las siguientes integrales indefinidas.

5. $\int \frac{2x}{x^2-25}\,dx$

6. $\int \cos(5x+1)\,dx$

III.- Aplica el método correspondiente y calcula las siguientes integrales indefinidas.

7. $\int e^x \cos x \, dx$

8. $\int \frac{4x^2 + 2x - 6}{x^3 - x^2 - 6x} dx$

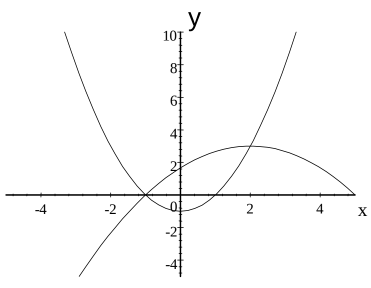
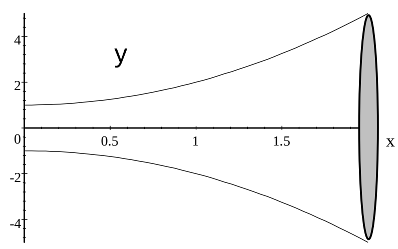
IV.- Calcula el área entre las gráficas.

9. $f(x) = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 4x - 5\right)$ y $g(x) = x^2 - 1$. Realiza la gráfica.

V.- Calcula el volumen del sólido de revolución.

10. Sea $f(x) = x^2 + 1$. Calcula el volumen del sólido de revolución al girar la gráfica de la función f(x) alrededor del eje “x” en el intervalo $[0, 2]$. Realiza la gráfica.

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	$\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + c$
2	$F(x) = \frac{5}{4}x^4 + 2x + c$
3	$\frac{1}{3}x^3 - x + c$
4	$\frac{1}{3}\ln\lvert\sec 3x\rvert + c \quad ó \quad -\frac{1}{3}\ln\lvert\cos 3x\rvert + c$
5	$\ln\lvert x^2 - 25\rvert + c$
6	$\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x+1) + c$
7	$\frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + c$
8	$\ln\lvert x\rvert + \frac{12}{5}\ln\lvert x-3\rvert + \frac{3}{5}\ln\lvert x+2\rvert + c$
9	$A = 6\,u^2$ 
10	$V = \frac{206}{15}\pi\,u^3$ 

BIBLIOGRAFÍA

- BOSCH GIRAL, CARLOS., GUERRA TEJADA, MANUEL. *Cálculo Diferencial e Integral.* 8ª reimpresión. Publicaciones Cultural, México, 1992.

- SWOKOWSKI EARL W. *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1987.

- LEITHOLD LOUIS. *El Cálculo con Geometría Analítica.* Harla, México, 1973.

- PURCELL EDWIN J., VARBERG DALE. *Cálculo Diferencial e Integral.* Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1993.

SUGERENCIAS PARA PRESENTAR EXÁMENES DE RECUPERACIÓN O ACREDITACIÓN ESPECIAL

Para evitar cualquier contratiempo al presentar el examen de recuperación o acreditación especial debes considerar las siguientes recomendaciones:

Organización:

- Preséntate al menos con 10 minutos de anticipación al salón indicado. Debes **mostrar** esta guía resuelta al profesor aplicador.
- Lleva el comprobante de inscripción al examen y tu credencial actualizada.
- Lleva dos lápices del No. 2 ó 2 ½.
- No olvides una goma que no manche.

Durante el examen:

- Lee con atención tanto las instrucciones como las preguntas y si tienes alguna duda consúltala con el aplicador.
- Contesta primero las preguntas que te parezcan "fáciles" y después concentra toda tu atención en las "difíciles".
- Si te solicitan explicar o desarrollar algún tema, identifica las ideas principales que quieras exponer y escríbelas de la manera más concreta y clara que puedas, evita el planteamiento de ideas innecesarias.
- Escribe tus respuestas con letra clara, legible y sin faltas de ortografía.
- Al terminar de contestar el examen, revísalo nuevamente para asegurarte que todas las preguntas estén contestadas.
- Centra tu atención en el examen, no trates de copiar, recuerda que el compañero de junto puede estar equivocado.

La Guía para presentar exámenes de Recuperación o
Acreditación Especial de
Cálculo Diferencial e Integral II
se terminó de reimprimir en el mes de marzo de 2006
en los talleres del Colegio de Bachilleres.
Prol. Rancho vista Hermosa Núm. 105
Col. Ex–Hacienda Coapa
México, D.F.

El tiraje fue de 1 400 ejemplares
más sobrantes para reposición.