COLEGIO DE
BACHILLERES

Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial
(Apoya a Plan 92)

Matemáticas I

Guía para presentar exámenes de
recuperación o acreditación especial

Matemáticas I
(Versión preliminar)

Esta guía fue elaborada por la **Secretaría Académica** a través de la **Dirección de Planeación Académica**.

Colaborador

Prof. David Contreras Rivas

Colegio de Bachilleres, México
www.cbachilleres.edu.mx
Rancho Vista Hermosa No. 105
Ex Hacienda Coapa,
04920, México, D.F.

La presente obra fue editada en el procesador de palabras Word 2002 (Office xp).

Este material se utiliza en el proceso de enseñanza aprendizaje del Colegio de Bachilleres, institución pública de educación media superior del Sistema Educativo Nacional.

AGOSTO 2004

ÍNDICE **PÁG.**

PRESENTACIÓN

Las evaluaciones de recuperación y de acreditación especial son oportunidades que deberás aprovechar para aprobar las asignaturas que, por diversas razones, reprobaste en el curso normal; pero ¡cuidado!, presentarse a un examen sin la preparación suficiente significa un fracaso seguro, es una pérdida de tiempo y un acto irresponsable que puedes evitar.

¿Cómo aumentar tu probabilidad de éxito en el examen mediante la utilización de esta guía? La respuesta es simple, observa las siguientes reglas.

- Convéncete de que tienes capacidad necesaria para acreditar la asignatura. Recuerda que fuiste capaz de ingresar al Colegio de Bachilleres mediante un examen de selección.
- Sigue al *pie de la letra* las instrucciones de la guía.
- Procura dedicarte al estudio de este material, *durante 15 días al menos, tres horas diarias continuas.*
- Contesta toda la guía: es un requisito que la presentes resuelta y en limpio al profesor aplicador antes del examen correspondiente.

PRÓLOGO

En el marco del programa de desarrollo institucional 2001 y 2006, el estudiante adquiere una especial relevancia, por lo que el Colegio de Bachilleres metropolitano se ha avocado a la elaboración de diversos materiales didácticos que apoyen al estudiante en diversos momentos del proceso de enseñanza aprendizaje.

Uno de los materiales elaborados son las guías de estudio, las cuales tienen como propósito apoyar a los estudiantes que deben presentar exámenes de recuperación o acreditación especial favoreciendo sus probabilidades de éxito.

En este contexto, la guía para presentar exámenes de recuperación y acreditación especial de **Matemáticas I** se ha elaborado con el propósito de que los estudiantes que se encuentran en situación académica irregular y que tienen necesidad de presentar exámenes en periodos extraordinarios para acreditar la asignatura cuenten con este material para llevar a cabo su preparación y, así, contar con más elementos para incrementar sus posibilidades de éxito.

Esta guía aborda en forma integral y sintética las principales temáticas establecidas en el programa de estudio; las actividades y ejercicios que se plantean son un apoyo para que el estudiante recupere los conocimientos previos, los relacione con otros más complejos y, en su caso, los aplique en el desarrollo de procedimientos y modelos matemáticos propios del cálculo. Esto permitirá que, con el estudio de la guía, continúe desarrollando y ejercitando sus habilidades de análisis y razonamiento matemático. Al final del desarrollo de las unidades la guía contiene una autoevaluación sobre los elementos esenciales de toda la unidad, para que el alumno verifique su grado de comprensión y dominio. Asimismo se incluyen algunas sugerencias para reforzar el apoyo sobre los aspectos estratégicos del tema.

En la primera unidad, ***ARITMÉTICA: UNA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA***, se estudian las propiedades de los números reales, sus algoritmos y métodos básicos, así como los signos de agrupación para aplicarlos en la solución de problemas, posteriormente se aborda la elaboración y representación algebraica de problemas de diferentes áreas, partiendo de ejemplos sencillos hasta llegar a modelos con un poder de generalidad mayor.

En la segunda unidad, ***LENGUAJE ALGEBRAICO: OPERATIVIDAD**,* se realiza el estudio de las operaciones algebraicas esenciales y las ventajas y aplicaciones de sus niveles de generalidad y abstracción respecto de las operaciones aritméticas. Esto a través de la revisión de la reducción de términos semejantes, leyes de los exponentes, operatividad de los polinomios, así como del estudio y aplicación de los productos notables y la factorización en diversos tipos de problemas.

En la unidad III, ***ECUACIONES: MODELOS GENERALIZADORES***, se estudian las ecuaciones de 1er. grado enfatizando en un sistema de ecuaciones como caso particular de una función lineal; la idea básica es resaltar la importancia del concepto de función, para ello se plantean ejercicios donde se integran los aspectos aritméticos y algebraicos, estudiados anteriormente, hasta llegar a su solución, se revisan sus procedimientos de solución, su representación gráfica. Posteriormente se aborda el estudio de los sistemas de ecuaciones de 1er. grado con una y dos incógnitas, sus métodos de solución hasta el planteamiento de ejercicios cuya solución implica el modelos algebraico de un sistema de ecuaciones.

Por último se proporciona una bibliografía básica en la que se pueden consultar los temas desarrollados en la guía.

Unidad I

Aritmética:
Una Introducción al Álgebra

1.1 OPERANDO CON LOS NÚMEROS REALES.

APRENDIZAJES
• Realizar operaciones con números reales que incluyan signos de agrupación.

Antes de iniciar el estudio de la aritmética como una introducción al álgebra, es importante conocer la clasificación de los números reales ($\mathbb{R}$), éstos son todos los números que se conocen en la actualidad.

El siguiente diagrama nos muestra las distintas clases de números con los cuales vamos a trabajar.

- Números Reales (R)
  - Números Racionales (Q)
    - Enteros (Z)
      - Enteros positivos o Naturales (N)
      - Cero (0)
      - Enteros Negativos
    - Números Racionales no enteros
  - Números Irracionales (Q')

- **Números Racionales**: Los elementos de este conjunto son aquellos números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, siendo el denominador diferente de cero. Se denota con la letra $\mathbb{Q}$ y se define como:

$$\mathbb{Q} = \{a/b \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}, \text{ ejemplos: } \frac{2}{5}, \frac{3}{-4}, \frac{6}{1}, \frac{-10}{5}$$

-
- **Números Enteros**: A este conjunto de números lo denotamos con la letra ($\mathbb{Z}$) y está formado por números positivos y negativos. Si estos números los representamos en la recta numérica, entonces, a los que están a la derecha del origen (0) se les llama ENTEROS POSITIVOS y si están a la izquierda del origen les llamaremos ENTEROS NEGATIVOS. En este subconjunto de los números reales, se incluye al cero (0).

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

- **Números Irracionales** ($\mathbb{Q}'$): Son aquéllos que no se pueden expresar como un cociente de dos números y tienen una representación decimal infinita no periódica.

Un ejemplo de clasificación de números en el subconjunto al que pertenecen es el siguiente, revísalo con atención.

$$\left\{\frac{5}{6},\ -4,\ 7,\ -\frac{12}{5},\ 2,\ \pi,\ -3,\ 0,\ \sqrt{5},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \sqrt{3},\ 10,\ e,\ -\frac{3}{7},\ \sqrt{12}\right\}$$

Números Naturales: 7, 2, 1, 10

Números Enteros: -4, 7, 2, -3, 0, 1, 10

Números Racionales no enteros: $\frac{5}{6},\ -\frac{12}{5},\ \frac{1}{4},\ -\frac{3}{7},\ -\frac{4}{1},\ \frac{7}{1},\ \frac{2}{1},\ -\frac{3}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{10}{1}$

Números Irracionales: $\pi,\ \sqrt{5},\ \sqrt{3},\ e,\ \sqrt{12}$

A continuación se presentan las PROPIEDADES DE CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades de campo de los números reales: Axiomas de la adición.

Propiedad	**Ejemplo**	**Definición**
Cerradura	3 + 4	Para toda a, b $\in \mathbb{R}$, (a + b) está en $\mathbb{R}$ y (a + b) es única.
Asociativa	(2+3)+4 = 2+(3+4)	Para toda a, b y c $\in \mathbb{R}$, (a + b)+c =a + (b + c)
Existencia del idéntico	5 + 0 = 5 0 + 5 = 5	Existe $\mathbb{R}$ un único elemento cero (0). a + 0 = a y 0 + a = a
Existencia del inverso	8 + (-8) = 0 (-8) + 8 = 0	Para cada a $\in \mathbb{R}$, existe un elemento - a $\in \mathbb{R}$, tal que: a + (-a) = 0 y (-a) + a = 0
Conmutativa	3 + 7 = 7 + 3	Para toda a, b $\in \mathbb{R}$, a + b = b + a

Observa que en estas propiedades se utiliza un lenguaje algebraico; por ejemplo, en la definición de la propiedad conmutativa nos dice que para cualquier número a, b que esté en los números reales, *"a más b es igual que b más a"*, es decir, que es lo mismo que sumes 3 más 7 que sumes 7 más 3.

Propiedades de campo de los números reales: Axiomas de la multiplicación.

Propiedad	Ejemplo	Definición
Cerradura	2·3	Para toda a, b $\in \mathbb{R}$, a b está en $\mathbb{R}$ y a b es única.
Asociativa	(5·6)7 = 5(6·7)	Para todo a, b y c $\in \mathbb{R}$, (a b)c = a(b c)
existencia del idéntico	1(3) = 3 3(1) = 3	Existe $\mathbb{R}$ un único elemento uno (1 $\neq$ 0) con la propiedad de que para toda a $\in \mathbb{R}$, 1(a) = a y (a) 1 = a
existencia del inverso	2(1/2) = 1 1/2(2) = 1	Para cada a $\in \mathbb{R}$, excepto cero existe un elemento 1/a $\in \mathbb{R}$, tal que: a (1/a) = 1 y (1/a) a = 1
distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	2 (3+5) = 2(3) + 2(5) (3+5) 2 = 3(2) + 5(2)	Para toda a, b y c $\in \mathbb{R}$, a (b + c) = a b + a c (b + c) a = b a + c a
Conmutativa	(3)(4) = (4)(3)	Para todo a, b $\in \mathbb{R}$, a b = b a

Es importante que tomes en cuenta estas propiedades ya que las usaremos con frecuencia; además el tipo de lenguaje, ya que en el Álgebra se utilizan letras (literales) para representar cantidades y números.

En la tabla anterior se define la existencia de los inversos, es decir, al número 1/a se le conoce como inverso multiplicativo o reciproco de “a”; por ejemplo, el inverso multiplicativo de 3 es 1/3.

En matemáticas se utilizan símbolos para realizar operaciones de: (+) suma, (-) resta, ($\div$) división y (x) multiplicación. Cabe mencionar que en el estudio del álgebra, la multiplicación se representa generalmente con paréntesis, por ejemplo: (3)(4) o colocando un punto intermedio entre los números, por ejemplo: 2 ·3. Como se muestra en la siguiente tabla.

Operación	Ejemplo
suma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3(5)+1(4)}{(4)(5)}=\frac{15+4}{20}=\frac{19}{20}$
resta: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$	$\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{7(3)-2(8)}{(8)(3)}=\frac{21-16}{24}=\frac{5}{24}$
multiplicación: $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{(4)(3)}{(5)(6)}=\frac{12}{30}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$
división: $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ *sí y solo sí* b y d $\neq$ 0	$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{(2)(4)}{(5)(3)}=\frac{8}{15}$

Observa en las fórmulas anteriores, que en la multiplicación de números racionales se realiza el producto de numerador por numerador y denominador por denominador; sin embargo, en la división se multiplican el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, así mismo, el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda, es decir, **en forma "cruzada"**, para llegar al resultado. Más adelante realizaremos algunas operaciones y problemas, donde se apliquen dichas fórmulas.

LOS SIGNOS DE AGRUPACIÓN se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos, deben considerarse como un todo, o sea como una sola cantidad.

Los signos de agrupación que se utilizan con mayor frecuencia son los siguientes: Paréntesis ordinario ( ), el corchete [ ] y las llaves { }.

Por ejemplo a + (b - c) equivale a: a + b - c

Para eliminar los signos de agrupación, se deben tomar en cuenta las siguientes reglas:

1.- Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo (+), se deja el mismo signo que tenga cada una de las cantidades que se encuentran dentro de él.

2.- Para suprimir signos de agrupación precedidos de un signo (-), cambia el signo a cada una de las cantidades que se encuentran dentro de él.

3.- Para simplificar, se parte del contenido de los signos de agrupación más internos y se procede así hasta eliminarlos completamente.

Hay casos en los que se debe resaltar lo siguiente, cuando se tiene una multiplicación por ejemplo 3(4+5), esto indica que el "3" multiplica a todo lo que está dentro del paréntesis, esto es 3(4) + 3(5) es decir, se debe realizar primero la operación que se indica dentro del paréntesis y luego multiplicarla por 3.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO.

En el siguiente ejercicio se incluyen las operaciones básicas de la Aritmética con diferentes signos de agrupación, veamos como se resuelve.

$$\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right\}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}\div\frac{3}{2}\right]=$$

Analiza con cuidado el siguiente procedimiento utilizado en la solución del ejemplo.

Paso 1: Realiza las operaciones que están dentro de los signos de agrupación.

$$\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{6-10}{12}=\frac{-4}{12}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$$

$$\frac{1}{4}\div\frac{3}{2}=\frac{(1)(2)}{(4)(3)}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Paso 2: Sustituye en la operación original y realiza las operaciones indicadas, simplificando a su mínima expresión.

$$\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right\}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}\div\frac{3}{2}\right]= \frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{-3}{12}=\frac{-1}{4}$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$

Paso 3: Realiza la operación indicada para obtener el resultado.

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{-9+4}{36}=\frac{-5}{36}$$

Por lo tanto:

$$\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right\}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}\div\frac{3}{2}\right]=\frac{-5}{36}$$

Aplicando el procedimiento anterior resuelve la siguiente operación.

$$\left\{\frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+3\left(\frac{3}{16}\div\frac{9}{8}\right)\right\}=$$

Paso 1: Realiza la resta.

Paso 2: Realiza la división.

Paso 3: Realiza las multiplicaciones.

Paso 4: Simplifica las cantidades.

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos, realiza las operaciones en hojas aparte y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. ( )	Elimina los signos de agrupación y resuelve $\frac{1}{8}\left[8-2(6-2)+3\{7(5-3)-4\}+2\right]=$ a) 2 b) 4 c) 7 d) 11
2. ( )	Elimina los signos de agrupación y resuelve $\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+5\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right)\right\}=$ a) $\frac{-3}{15}$ b) $\frac{-1}{16}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{2}{9}$
3. ( )	Elimina los signos de agrupación y resuelve $\frac{3}{2}\left\{\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}\div\frac{1}{6}\right)\right\}=$ a) $\frac{27}{15}$ b) $\frac{35}{12}$ c) $\frac{65}{8}$ d) $\frac{67}{5}$

4. ( )	Elimina los signos de agrupación y resuelve $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)\right]}{1+\left[3\left(\frac{1}{2}\right)\right]}=$ a) $\dfrac{-15}{20}$ b) $\dfrac{-18}{25}$ c) $\dfrac{17}{22}$ d) $\dfrac{21}{23}$
5. ( )	Elimina los signos de agrupación y resuelve $2-\dfrac{3}{4}\left[-8+5\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}\right)\right]=$ a) $\dfrac{-12}{8}$ b) $\dfrac{-9}{7}$ c) $\dfrac{13}{4}$ d) $\dfrac{6}{5}$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de Pregunta	Respuesta correcta
1	b
2	b
3	d
4	b
5	c
Sugerencias	
Si te equivocaste en los reactivos 1, 2, 3, 4 ó 5 revisa con más detenimiento el ejemplo resuelto y las operaciones fundamentales de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división), de números racionales, en el texto de Ortiz Campos, Francisco J. Matemáticas I, Álgebra. pp. 44-46, 53-66.	

1.2 DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA.

APRENDIZAJES
• Resolver problemas con métodos aritméticos que impliquen operaciones combinadas. • Manejar la noción de razón numérica. • Aplicar el concepto de proporción en la solución de problemas. • Aplicar modelos algebraicos a situaciones o problemas.

Una de las ramas importantes de la Matemática para el estudio del Álgebra, es la Aritmética; debido a los aprendizajes esenciales que se adquieren sobre las operaciones básicas en ésta ya que son de aplicación generalizada e indispensable en el estudio de cualquier otra rama de las matemáticas. Esto se concreta, como ya vimos, en la realización de operaciones con números racionales, donde a, b, c y d $\in$ R, para lo cual se requiere aplicar las fórmulas vistas anteriormente.

Fórmula (operación)	
suma	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
Resta	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$
Multiplicación	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$
División	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$
sí y solo sí b y d $\neq$ 0	

Ahora bien, recuerda que *un número racional representa una relación entre dos números*. Veamos cómo se relaciona esto con las **razones y proporciones***.*

En algunas ocasiones habrás escuchado: “Pedro tiene 6 canicas y Jorge tiene 4”, o “Gabriela tiene 3 lápices y Patricia sólo uno”. En el primer caso, se dice que la relación es 6 canicas a 4 canicas, o sea 6:4 y en el segundo, 3 lápices son a 1 lápiz, esto es 3:1. A este tipo de comparaciones se le llama **razón geométrica o por cociente** y se define como la **comparación por cociente entre dos números donde el denominador debe ser diferente de cero, esto es:**

$\frac{a}{b}$ que se lee “*a es* a *b*”.

Cuando una relación se establece entre dos números cuyas cantidades representan medidas de la misma especie, dichos números deben estar expresados en la misma unidad de medida.

UNA PROPORCIÓN es la igualdad de dos razones. Una forma de denotar una proporción es la siguiente:

a : b = c: d; que se lee *"a es a b* como *c es a d"*

Por ejemplo: 4: 6 = 10: 15 que se lee "4 es a 6 como 10 es a 15".

En general esta igualdad de razones, se representa de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La propiedad fundamental de las proporciones establece que en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{sí y sólo sí} \quad ad = bc}$$

Cuando un valor es "desconocido", por ejemplo $\frac{4}{x} = \frac{10}{15}$, entonces, para encontrar la incógnita "*x*", se aplica lo que se conoce como una "regla de tres".

Es importante, además, reconocer el *tipo de variación* que se presenta para resolver diversos problemas de razones y proporciones.

- **Variación directamente proporcional.**

Dadas dos cantidades, si a *un aumento de una corresponde un aumento para la otra*, o *una disminución de una corresponde una disminución de la otra*, se dice que es una variación directamente proporcional.

- **Variación inversamente proporcional.**

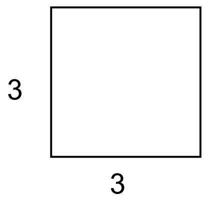
Dadas dos cantidades, puede ocurrir que a *todo aumento de una corresponda una disminución para la otra, o que a toda disminución de una corresponda a un aumento en la otra*, se dice que es una variación inversamente proporcional.

Para encontrar la solución a diferentes tipos de problemas y situaciones se utilizan todo tipo de fórmulas y procedimientos aritméticos, como las razones y proporciones, sin embargo algunos problemas no se pueden resolver sólo con métodos aritméticos debido a las limitaciones que éstos tienen, en estos casos se retoman los pasos más importantes del procedimiento aritmético y los valores se expresan en **lenguaje algebraico** combinando generalmente letras, símbolos y números, cambiando el *modelo aritmético* a un *modelo algebraico,*. La finalidad es generalizar estas fórmulas y representar expresiones y cantidades de manera abreviada.

Por ejemplo:

Para calcular el área de un cuadrado cuyos lados miden 3 cm, se aplica la fórmula del área de un cuadrado ($A = \ell \times \ell = \ell^2$).

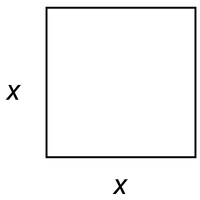
En aritmética las cantidades se representan por números y éstos expresan valores determinados.



$A = 3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$

Por lo tanto, el área es de 9 cm^2.

Siguiendo con la lógica del mismo ejercicio, podemos generalizar el cálculo del área de un cuadrado de la siguiente forma:



$A = (x)(x) = A = x^2$

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO.

Analiza el procedimiento con el cual se resuelve el siguiente ejercicio.

En una bodega se tienen $3\frac{1}{2}$ toneladas de azúcar y se venden $1\frac{2}{3}$ toneladas.

¿Cuántas toneladas de azúcar quedan?

Para responder el ejercicio realiza los siguientes pasos:

Paso 1: Se "transforman" las cantidades a números racionales, recuerda que se multiplica el número entero (3) por el denominador (2) y al resultado se le suma el numerador (1).

$$3\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \quad \text{y} \quad 1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

Paso 2: Se realiza la resta:

$$\frac{7}{2}-\frac{5}{3}=\frac{21-10}{6}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$$

Por lo tanto, quedan $1\frac{5}{6}$ toneladas de azúcar.

Considerando lo anterior, resuelve el siguiente problema.

En un almacén se tienen $2\frac{3}{4}$ toneladas de trigo y se venden $1\frac{1}{3}$ toneladas.

¿Qué cantidad de trigo queda?

Paso 1: Transforma las cantidades a números racionales.

Paso 2: Realiza la resta de éstos.

Los siguientes problemas se resuelven utilizando *razones y proporciones*, recuerda que si conocemos tres de las cuatro cantidades que aparecen en la proporción, puedes encontrar la cuarta cantidad con facilidad. Repasa, además, lo qué es una *variación directamente proporcional* y qué es *una variación inversamente proporcional.*

En una escuela con 800 alumnos, el 63% son mujeres. ¿Cuántos hombres hay en dicha escuela?

Analiza el siguiente procedimiento.

El total de alumnos representa el 100%, esto es: 800 alumnos es el 100%

El 63% son mujeres; para conocer el porcentaje de hombres se resta del total:

$$100\% - 63\% = 37\%$$

Con estas cantidades se construye la proporción:

$$\frac{800}{100\%} = \frac{x}{37\%}$$

Para conocer el valor de "x", se aplica la fórmula de proporción, esto es:

$$(800)\ (37\%) = (100\%)\ (x)$$

Dividiendo ambos lados entre 100%, se tiene.

$$\frac{(800)(37\%)}{100} = \frac{100\%(x)}{100\%}$$

Simplificando, se obtiene:

$$\frac{(800)(37\%)}{100\%} = x$$

$$x = \frac{29600}{100} = 296$$

Por lo tanto 296 son hombres en la escuela.

¿Cuántas mujeres hay?

Si la escuela cuenta con 800 alumnos y 296 son hombres, simplemente se realiza una resta para conocer el número de mujeres.

800 - 296 = 504 mujeres.

Resuelve los siguientes problemas, indicando si se trata de una variación directa o inversamente proporcional.

1. Seis obreros pulen un piso en ocho días. ¿En cuántos días lo realizarán doce obreros?

Plantea el problema con razones y proporciones.

2. Un tren viaja 320 km. a 40 km. por hora. ¿Qué distancia recorrerá en el mismo tiempo a 72 km. por hora?

Plantea el problema con razones y proporciones.

A continuación desarrollaremos un ejemplo en el que se aplica tanto el método aritmético como el algebraico, con la finalidad de que aprecies la diferencia entre ambos y concluyas que éste último puede ser generalizado.

Las edades de Ana y Bertha suman 48 años. Si la edad de Bertha es cinco veces la edad de Ana, ¿qué edad tiene Ana y qué edad tiene Bertha?

Analiza la solución del ejercicio en el que se utiliza el **método aritmético**.

La edad de Ana más la edad de Bertha es igual a 48 años; como la edad de Bertha es cinco veces la edad de Ana, tenemos que:

Al sumar seis veces la edad de Ana el resultado es de 48 años.

Esto implica que si dividimos 48 entre 6, obtenemos la edad de Ana.

Por lo tanto

La edad de Ana = 8 años.

La edad de Bertha = (8)(5) = 40 años.

Ahora analiza la solución del ejercicio en el que se utiliza el **método algebraico**.

La edad de Ana la representamos con “x”, esto es:

x = edad de Ana.

$5x$ = edad de Bertha, porque es 5 veces la edad de Ana.

Como ambas edades suman 48 años, tenemos:

$x + 5x = 48$ años.

$6x = 48$ años.

Seis “x” equivalen a 48 años, entonces “x” valdrá una sexta parte de 48 años, por lo tanto:

$x = 8$ años, edad de Ana.

$5x = 40$ años, edad de Bertha.

Resuelve el siguiente problema, utilizando los métodos aritmético y algebraico.

La edad de Federico es el triple de la edad de Guadalupe, y ambas edades suman 60 años. Encuentra las edades de Federico y Guadalupe.

Método aritmético.

Método algebraico.

E J E R C I C I O S

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas en hojas aparte y escribe en el paréntesis de la izquierda, la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. ( )	¿Qué cantidad de pólvora se obtiene al mezclar $16\frac{2}{3}$ gramos de salitre, $2\frac{7}{9}$ gramos de carbón y $2\frac{2}{3}$ gramos de azufre? a) $19\frac{4}{9}$ gramos de pólvora. b) $22\frac{1}{9}$ gramos de pólvora. c) $24\frac{4}{9}$ gramos de pólvora. d) $27\frac{2}{9}$ gramos de pólvora.
2. ( )	Se envían por correo tres paquetes que en total pesan 5 kilogramos. Si uno pesa $1\frac{2}{3}$, otro pesa $2\frac{1}{9}$, ¿cuál será el peso del tercer paquete? a) $1\frac{2}{9}$ Kilogramos. b) $1\frac{8}{9}$ Kilogramos. c) $2\frac{1}{9}$ Kilogramos. d) $2\frac{8}{9}$ Kilogramos.

3. ( )	En un almacén se tienen $8\frac{1}{2}$ toneladas de maíz y se venden $3\frac{7}{8}$ toneladas. ¿Cuántas toneladas de maíz quedan? a) $3\frac{9}{5}$ toneladas de maíz. b) $4\frac{1}{16}$ toneladas de maíz. c) $4\frac{5}{8}$ toneladas de maíz. d) $5\frac{1}{8}$ toneladas de maíz.
4. ( )	Si se juntan tres placas de acero que tienen $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{16}$ pulgadas de espesor respectivamente. ¿Qué espesor se tiene en total? a) $\frac{15}{16}$ pulgadas. b) $\frac{11}{28}$ pulgadas. c) $\frac{22}{32}$ pulgadas. d) $\frac{17}{16}$ pulgadas.
5. ( )	Un alumno contesta en forma correcta 39 preguntas de un total de 60. ¿Qué porcentaje contestó correctamente? a) 62 % b) 65 % c) 68 % d) 69 %

6. ( )	Por el consumo de 65 m^3 de agua se pagan \$84.50. ¿Cuánto se pagará por 72 m^3 de agua? a) \$ 89.50 b) \$ 93.60 c) \$ 94.00 d) \$ 98.20
7. ( )	Por tres kilos de azúcar se pagaron \$14.10. ¿Cuánto se pagará por siete kilos de azúcar? a) \$ 21.70 b) \$ 24.20 c) \$ 27.30 d) \$ 32.90
8. ( )	Para hacer una obra en 42 días se emplean 50 obreros. ¿Cuántos obreros se necesitan para terminar la obra en 30 días? a) 60 obreros. b) 65 obreros. c) 70 obreros. d) 75 obreros.
9. ( )	Un grupo de 20 excursionistas llevan provisiones para 15 días. Si al momento de partir el grupo aumenta a 25 excursionistas, ¿para cuántos días les alcanzarán las provisiones? a) 12 días. b) 11 días. c) 9 días. d) 7 días.
10.( )	Para realizar la construcción de un reactor en 60 días se necesitan 24 obreros. ¿Cuántos obreros serán necesarios para construir el mismo reactor en 20 días? a) 50 obreros. b) 65 obreros. c) 72 obreros. d) 80 obreros.

INSTRUCCIONES: Anota en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta. Resuelve en hojas aparte los problemas aplicando el método aritmético o el método algebraico.

11.( )	Si al doble de un número se le agregan siete unidades, el resultado que se obtiene es 33, ¿cuál es dicho número? a) 12 b) 13 c) 14 d) 15
12.( )	La suma de las edades de Juan y Pedro es de 84 años. Si Pedro tiene 8 años menos que Juan, ¿cuáles son las edades de cada uno? a) Edad de Juan = 44 años. Edad de Pedro = 38 años. b) Edad de Juan = 45 años. Edad de Pedro = 39 años. c) Edad de Juan = 46 años. Edad de Pedro = 38 años. d) Edad de Juan = 47 años. Edad de Pedro = 39 años.
13.( )	Una amiba se reproduce por bipartición cada hora, (o sea que se duplica cada hora). Si la reproducción comienza con una amiba, ¿cuántas horas habrán transcurrido para tener 32,768 amibas? a) 10 horas. b) 13 horas. c) 15 horas. d) 17 horas.

INSTRUCCIONES: Lee con atención las siguientes preguntas y escribe sobre el espacio correspondiente la respuesta correcta.

14. Se define como la comparación por cociente entre dos números:____________________.

15. A la igualdad de dos razones se le llama:____.

16. Dadas dos cantidades, si una cantidad aumenta y otra segunda cantidad aumenta, se dice que es una variación: ____.

17. Dadas dos cantidades, si una cantidad aumenta y la otra disminuye, se dice que es una variación:____.

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de Pregunta	Respuesta Correcta
1 2 3 4	b a c d
5 6 7	b b d
8 9 10	c a c
11 12 13	b c c
14 15 16 17	Razón. Proporción. Directamente proporcional. Inversamente proporcional.

Sugerencias

- Si te equivocaste en los reactivos 1, 2, 3 ó 4, realiza ejercicios con las operaciones fundamentales de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división).
- Si te equivocaste en los reactivos 5, 6 ó 7, revisa los ejercicios resueltos y consulta el texto de Ortíz Campos, Matemáticas I, Álgebra. pp. 68-71.
- Si te equivocaste en los reactivos 8, 9 ó 10, consulta el texto de Ortíz Campos. pp. 73 – 75.
- Si te equivocaste en los reactivos 11, 12 ó 13, revisa el fascículo No. 2 de Matemáticas I. pp. 1-5.
- Si te equivocaste en los reactivos 14, 15, 16 ó 17, revisa los conceptos de razones y proporciones y consulta el libro de Ortíz Campos, Matemáticas I, Álgebra. pp. 68 – 75.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Para resolver todos los ejercicios cuentas con una hora treinta minutos.

A continuación se te presentan una serie de ejercicios, con el fin de que reafirmes tus conocimientos y habilidades para la solución de problemas. Realiza todas las operaciones y desarrollos en hojas aparte, ya que debes ejercitarlos para lograr los aprendizajes de esta unidad.

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos, realiza las operaciones pertinentes en hojas aparte y escribe en el paréntesis de la izquierda, la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. ( )	Simplifica $7[5+2(4-1)]-[8(6-3)+6(7-1)]=$ a) 17 b) 15 c) 13 d) 10
2. ( )	Simplifica $3+2\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)-\left(1+\frac{2}{3}\right)\right]+\frac{3}{8}=$ a) $\frac{18}{21}$ b) $\frac{20}{21}$ c) $\frac{25}{24}$ d) $\frac{29}{27}$

3. ( )	Simplifica $\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)\div\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)\right\}=$ a) $1\frac{1}{3}$ b) $1\frac{2}{9}$ c) $-1\frac{1}{8}$ d) $-1\frac{3}{7}$
4. ( )	En un almacén se tienen $15\frac{3}{4}$ toneladas de harina y se venden $8\frac{1}{6}$ toneladas. ¿Cuántas toneladas de harina quedan? a) $6\frac{1}{2}$ toneladas de harina. b) $7\frac{7}{12}$ toneladas de harina. c) $8\frac{1}{6}$ toneladas de harina. d) $9\frac{3}{5}$ toneladas de harina.

5. ( )	De una lámina que mide $5\frac{2}{3}$ metros, se han cortado dos tramos; uno de $1\frac{1}{5}$ y otro de $2\frac{1}{3}$ metros. ¿Cuánto mide el tramo de lámina que queda? a) $\frac{35}{13}$ metros. b) $\frac{26}{11}$ metros. c) $\frac{32}{15}$ metros. d) $\frac{25}{17}$ metros.
6. ( )	Se envían por correo cuatro paquetes que en total pesan 8 kilos. El primero pesa $1\frac{1}{5}$ kilos, el segundo $2\frac{3}{10}$ kilos y el tercero $1\frac{1}{2}$ kilos. ¿Cuánto pesa el cuarto paquete? a) 3 kilos. b) $4\frac{1}{2}$ kilos. c) 5 kilos. d) $5\frac{3}{7}$ kilos.
7. ( )	En una escuela con 1200 alumnos el 58% son mujeres. ¿Cuántos hombres hay? a) 888 hombres. b) 720 hombres. c) 696 hombres. d) 504 hombres.
8. ( )	Un alumno contesta en forma correcta 95 preguntas de un total de 128. ¿Qué porcentaje contestó correctamente? a) 70.31% b) 71.88% c) 74.22% d) 75.78%

9. ( )	Para hacer una obra en 25 días se necesitan 40 obreros. ¿Cuántos obreros se necesitan para terminar la obra en 20 días? a) 50 obreros. b) 55 obreros. c) 58 obreros. d) 60 obreros.
10. ( )	Para realizar la construcción de un reactor en 66 días, se necesitan 38 especialistas. ¿En cuántos días lo realizarán 57 especialistas? a) 40 días. b) 44 días. c) 48 días. d) 52 días.
11.( )	Una amiba se reproduce por bipartición cada hora. Si la reproducción se inicia con una amiba, ¿cuántas amibas se tendrán al cabo de 12 horas? a) 8192 amibas. b) 7942 amibas. c) 6467 amibas. d) 4096 amibas.
12. ( )	La edad de Rodrigo es el doble que la edad de María, y ambas edades suman 36 años. ¿Cuál es la edad de Rodrigo y cuál la de María? a) Edad de Rodrigo = 26 años. Edad de María = 14 años. b) Edad de Rodrigo = 25 años. Edad de María = 15 años. c) Edad de Rodrigo = 24 años. Edad de María = 12 años. d) Edad de Rodrigo = 22 años. Edad de María = 14 años.

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de reactivo	Respuesta correcta
1	a
2	c
3	c
4	b
5	c
6	a
7	d
8	c
9	a
10	b
11	d
12	c

Unidad II

Lenguaje Algebraico: Operatividad

2.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

APRENDIZAJES
• Reducir términos algebraicos semejantes. • Traducir situaciones numéricas a expresiones algebraicas. • Operar con expresiones algebraicas.

En la aritmética usamos números reales, en el álgebra se emplean símbolos, denominados literales, que normalmente son letras del alfabeto, y se utilizan para representar cualquier número o cantidad.

Por ejemplo, la suma de dos números (4+5), se puede escribir como un tercer número (9). En general, la suma de dos literales (x + y), puede escribirse como una tercera literal (z).

En las expresiones algebraicas los términos que tienen los mismos factores literales con exponentes iguales se llaman **términos semejantes**, por ejemplo: 7x y 2x; $8a^2$ y $2a^2$, porque contienen a la misma literal y el mismo exponente. Al número que se escribe antes de la literal se le llama **coeficiente numérico** del término. Cuando no aparece ningún número específico en un término, éste se considera como “1” (uno), por ejemplo ab tiene coeficiente 1 (1ab). Si un término no tiene signo que lo anteceda, se indicará como positivo; por ejemplo xy; es lo mismo que +xy.

Una **expresión algebraica** es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas. por ejemplo:

15, 6x, 8ab - 3c, -9x/y, $\sqrt{xy}$, etc.

Reducir términos semejantes es una operación para convertir en un solo término dos o más términos semejantes, por ejemplo:

$$5x + 6x - 3x = 8x$$

Cuando los números literales de una expresión aparecen únicamente en sumas, diferencias o productos, se dice que la expresión es un **polinomio**, por ejemplo:

3ab

5a - 6bc

x + y – z

$2x^3 - 3x^2 + 5x - 8$, etc.

Al polinomio con dos términos se le conoce como **binomio**, por ejemplo: a + b, x - y, etc., al de tres términos se le llama **trinomio**, por ejemplo:

$x^2 - 6x + 9$, 2a + 3b - 4c, etc.

Los **monomios** se consideran polinomios con un solo término, por ejemplo:

3xy, $\frac{5}{7}ab$, 6a, etc.

Las expresiones algebraicas pueden enunciarse empleando el lenguaje común y es conveniente ejercitarlo para su correcta traducción. Observa los siguientes ejemplos:

Lenguaje Común	**Lenguaje Algebraico**
Un número cualquiera	x
La suma de dos números	a + b
El cociente de dos números	$\frac{a}{b}$
El triple de un número	3x

Es importante que conozcan las partes que componen a un polinomio, por ejemplo: $-3x^5$

exponente

$-3x^5$

base

coeficiente

signo

El exponente representa el número de veces que se multiplica la base por sí misma:

$$x^5 = x \;.\; x \;.\; x \;.\; x \;.\; x$$

La base (x) es la expresión que ha de elevarse a la potencia (5) indicada.

$$x^5$$

El coeficiente numérico representa el número de veces que se tiene la base, en este caso −3.

$$-3x^5$$

Para realizar operaciones con polinomios, es importante que conozcas y apliques **las leyes de los exponentes**, las cuales se resumen en el cuadro siguiente:

LEYES DE LOS EXPONENTES.

DEFINICIÓN	**FÓRMULA**	**EJEMPLOS**
El producto de dos potencias de la misma base distinta de cero, es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.	$(a^m)(a^n) = a^{m+n}$	$(x^4)(x^3) = x^{4+3} = x^7$
La potencia de otra potencia de la misma base diferente de cero, es igual a la base elevada al producto de los exponentes.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$

La potencia de un producto donde a y b pertenecen a los Reales y son diferentes de cero, y m es un número entero positivo.	$(a\cdot b)^m = a^m b^m$	$(xy)^3 = x^3 y^3$
La potencia de un producto es igual al producto de los factores elevados a la misma potencia.	$(a^x b^y)^m = a^{x\cdot m} b^{y\cdot m}$	$(x^2 y^3)^3 = x^{2\cdot 3} y^{3\cdot 3} = x^6 y^9$
La potencia de una fracción. Sean a y b dos números distintos de cero y m un número entero positivo. En general para elevar una fracción a un exponente, el numerador y el denominador se elevan a dicho exponente.	$(a/b)^m = a^m/b^m$	$(3/x)^2 = 3^2/x^2 = 9/x^2$ $(x/y)^4 = x^4/y^4$
El cociente de dos potencias de la misma base, presenta tres casos, en los cuales dependen del valor del exponente del dividendo y del divisor.	$a^m / a^n = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ 1/a^{n-m} & \text{si } m < n \end{cases}$	$x^3/x^1 = x^{3-1} = x^2$ $a^2/a^2 = 1$ $y^2/y^5 = 1/y^{5-2} = 1/y^3$

NOTA: *Recuerda que cualquier número elevado a la potencia cero es igual a la unidad (1).*

$$\boxed{X^0 = 1}$$

Por otra parte, debes conocer las **reglas de los signos para la multiplicación y la división.**

Reglas de los signos para la Multiplicación:

(+) (+) = +	Léase *"más por más es igual a más".*
(+) (-) = -	Léase *"más por menos igual a menos".*
(-) (+) = -	Léase *"menos por más es igual a menos".*
(-) (-) = +	Léase *"menos por menos es igual a más".*

Reglas de los signos para la División:

$\frac{+}{+}=+$	Léase *"más entre más es igual a más".*
$\frac{+}{-}=-$	Léase *"más entre menos es igual a menos".*
$\frac{-}{+}=-$	Léase *"menos entre más es igual a menos".*
$\frac{-}{-}=+$	Léase *"menos entre menos es igual a más".*

Observa que signos iguales en el producto y la división siempre son positivos y si los signos son contrarios serán negativos.

En los siguientes polinomios, observa como se eliminan los signos de agrupación y se reducen los términos semejantes.

$$(8xy-2yz)-(2xy-z)+(6yz-9zy+4)-(-7yx+3z)=$$

Paso 1: Se eliminan los signos de agrupación.

$$8xy-2yz-2xy+z+6yz-9zy+4+7yx-3z$$

Paso 2: Se ordenan y agrupan los términos que son semejantes.

$$8xy-2xy+7yx-2yz+6yz-9zy+z-3z+4$$

Antes de agrupar los términos semejantes, observa que: 8xy, -2xy y 7yx, son términos semejantes, (recuerda la propiedad conmutativa) haciendo esta aclaración, ahora agrupa los términos semejantes

$$(8xy-2xy+7xy)-(2yz-6yz+9yz)+(z-3z)+4=13xy-5yz-2z+4$$

Finalmente se obtiene:

$$(8xy-2yz)-(2xy-z)+(6yz-9zy+4)-(-7yx+3z)=13xy-5yz-2z+4$$

El uso de símbolos para simplificar el lenguaje es de gran importancia en las matemáticas. Las letras o literales se utilizan en el álgebra para representar números o cantidades, por ejemplo: el área de un cuadrado de lado "x", se representa como A = x^2, donde "A" es el área y "x" representa la longitud de su lado. Las expresiones algebraicas pueden enunciarse con un lenguaje común, pero es importante que lo practiques. Veamos los siguientes ejemplos:

Lenguaje Común	Lenguaje Algebraico
La suma de tres números.	$x + y + z$
El producto de dos números.	xy
El cociente de la suma de dos números entre otro número	$\frac{a+b}{c}$
El cuadrado de un número aumentado en ocho unidades.	$x^2 + 8$

Para sumar o restar polinomios, se deben eliminar los signos de agrupación, respetando las reglas de los signos y agrupando los términos semejantes. Observa el siguiente ejemplo:

$$\left(4x^2 + 6x + 5\right) + \left(-2x^2 + x - 3\right)$$

Para dar solución a este tipo de ejercicios, efectúa los siguientes pasos:

Paso 1: Se eliminan los signos de agrupación, aplicando las reglas de los signos.

$$\left(4x^2 + 6x + 5\right) + \left(-2x^2 + x - 3\right) = 4x^2 + 6x + 5 - 2x^2 + x - 3$$

Paso 2: Se ordenan y se agrupan los términos semejantes (los que son iguales).

$$\left(4x^2 + 6x + 5\right) + \left(-2x^2 + x - 3\right) = 4x^2 - 2x^2 + 6x + x + 5 - 3$$

Por lo tanto:

$$\left(4x^2 + 6x + 5\right) + \left(-2x^2 + x - 3\right) = 2x^2 + 7x + 2$$

Observa el procedimiento de la multiplicación de polinomios.

Multiplicar $\left(x^3 + 2x^2 - x\right)\left(x^2 - 2x + 5\right) =$

Paso 1: Se realiza la operación de cada factor del primer polinomio por cada factor del segundo polinomio, aplicando la regla de los signos.

$$\left(x^3\right)\left(x^2\right) - \left(x^3\right)(2x) + \left(x^3\right)(5) + \left(2x^2\right)\left(x^2\right) - \left(2x^2\right)(2x) + \left(2x^2\right)(5) - (x)\left(x^2\right) + (x)(2x) - (x)(5)$$

Paso 2: Se multiplican los factores, aplicando las leyes de los exponentes.

$$x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 2x^4 - 4x^3 + 10x^2 - x^3 + 2x^2 - 5x$$

Paso 3: Se agrupan términos semejantes y finalmente se obtiene el resultado.

$$\left(x^3+2x^2-x\right)\left(x^2-2x+5\right)=x^5+12x^2-5x$$

Si la multiplicación la realizamos en forma vertical, se tiene el mismo resultado.

$$\begin{array}{l}
x^3+2x^2-x \\
\underline{x^2-2x+5} \\
x^5+2x^4-x^3 \\
\quad\;\; -2x^4-4x^3+2x^2 \\
\qquad\qquad +5x^3+10x^2-5x \\
\hline
x^5+0x^4+0x^3+12x^2-5x
\end{array}$$

Para dividir un polinomio entre otro polinomio, se aplican las siguientes

REGLAS:

1) Se ordena el numerador y el denominador de cada polinomio con respecto a una literal y se colocan del exponente mayor al exponente menor.

2) Se divide el primer término del numerador, entre el primer término del denominador y el resultado será el primer término del cociente.

3) El término del cociente se multiplica por todo el polinomio del denominador y este producto se le resta al polinomio del numerador y se agrupan los términos que son semejantes en una columna.

4) Se ordenan los términos que quedaron y se repite el procedimiento, hasta que el residuo sea cero o ya no se pueda dividir.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO.

Observa como se aplican las reglas para dividir polinomios en el siguiente ejemplo; para ello deberás considerar lo expuesto anteriormente.

EJEMPLO:

Dividir $2x^4 - x^3 - 3 + 7x$ entre $2x + 3$

Analiza el procedimiento utilizado en la solución del ejemplo.

Paso 1: Se ordenan el numerador y el denominador del exponente mayor al exponente menor, en este caso están ordenados.

$$2x+3\overline{)2x^4 - x^3 + 7x - 3}$$

Paso 2: Dividir el primer término del numerador $2x^4$ entre el primer término del denominador $2x$.

$\frac{2x^4}{2x} = x^3$, Este resultado se anota encima del número de división

Paso 3: El resultado (del paso 2) se multiplica por el polinomio del denominador.

$$x^3(2x+3) = 2x^4 + 3x^3$$

Paso 4: El resultado anterior $2x^4 + 3x^3$ se resta del polinomio del numerador y se agrupan términos semejantes.

$$\begin{array}{r} x^3 \qquad\qquad\qquad \\ 2x+3\overline{)2x^4 - x^3 + 7x - 3} \\ \underline{-2x^4 - 3x^3 \qquad\quad} \\ -4x^3 + 7x - 3 \end{array}$$

Si el residuo $-4x^3 + 7x - 3$ es divisible entre el denominador $2x + 3$, se repite el procedimiento hasta que el residuo ya **NO** sea divisible entre el denominador o el residuo sea igual a cero.

Paso 1: Se divide el premier término del polinomio del residuo $-4x^3$ entre el primer término del denominador

$$\frac{-4x^3}{2x} = -2x^2$$

este resultado se coloca sobre el símbolo de división con su signo respectivo.

Paso 2: El resultado anterior se multiplica por el denominador.

$$-2x^2(2x+3) = -4x^3 - 6x^2$$

Paso 3. este resultado $-4x^3 - 6x^2$ se resta del polinomio del residuo y se agrupan términos semejantes.

$$\begin{array}{rl}
 & x^3 \,\square\, 2x^2 \\
2x+3 & \overline{\big)\, 2x^4 - x^3 + 7x - 3} \\
 & -2x^4 - 3x^3 \\
 & \underline{-4x^3 + 7x - 3} \\
 & \underline{+4x^3 \qquad\qquad + 6x^2} \\
 & 6x^2 + 7x - 3
\end{array}$$

Observa que se ordenó el polinomio del residuo del exponente mayor al exponente menor. Como el residuo ($6x^2 + 7x - 3$) es divisible entre el denominador se repite el procedimiento

Paso 1. Se divide $6x^2$ entre $2x$, es decir:

$$\frac{6x^2}{2x} = 3x$$

Paso 2: El resultado anterior se multiplica por el polinomio del denominador $2x+3$.

$$3x^2(2x+3) = 6x^2 + 9x$$

Paso 3. Se resta el polinomio $6x^2 + 9x$ de $6x^2 + 7x - 3$ y se agrupan términos semejantes.

$$\begin{array}{rl}
 & x^3 \,\square\, 2x^2 + 3x \\
2x+3 & \overline{\big)\, 2x^4 - x^3 + 7x - 3} \\
 & \underline{-2x^4 - 3x^3} \\
 & -4x^3 + 7x - 3 \\
 & \underline{+4x^3 \qquad\qquad + 6x^2} \\
 & 6x^2 + 7x - 3 \\
 & \underline{-6x^2 - 9x} \\
 & -2x - 3
\end{array}$$

Como el residuo es divisible entre el denominador se repite el procedimiento

Paso 1. Se divide $-2x$ entre $2x$, es decir:

$$\frac{-2x}{2x} = -1$$

Paso 2: El resultado anterior (-1) se multiplica por el denominador $2x+3$.

$$(-1)(2x+3) = -2x-3$$

Paso 3. Se resta $-2x-3$ del polinomio del residuo y se agrupan términos semejantes.

$$-2x-3-(-2x-3) = -2x-3+2x+3 = 0$$

Como el residuo es igual a cero la división queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 2x^2 + 3x \\
\hline
2x+3 & 2x^4 - x^3 + 7x - 3 \\
 & \underline{-2x^4 - 3x^3} \\
 & -4x^3 + 7x - 3 \\
 & \underline{-4x^3 \qquad + 6x^2} \\
 & 6x^2 + 7x - 3 \\
 & \underline{-6x^2 - 9x} \\
 & -2x - 3 \\
 & \underline{2x + 3} \\
 & 0
\end{array}$$

Ahora, realiza el siguiente ejercicio:

Divide el siguiente polinomio:

$$x-6\overline{\big)x^2+30-11x}$$

Ordena los polinomios con respecto a una literal y sigue el procedimiento de los ejemplos anteriores.

Paso 1:

Paso 2:

Paso 3:

Paso 4: Comprobación.

E J E R C I C I O S

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos, realiza tus operaciones en hojas aparte y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. ( )	Elimina los signos de agrupación y reduce los términos semejantes del siguiente polinomio. $(2a+3b)-(5c-4)+(8a+6)-(7c-9)=$ a) $10a+3b-12c+19$ b) $6a+3b+2c-13$ c) $-6a-3b-12c-13$ d) $-10a-3b-12c+13$
2. ( )	Elimina los signos de agrupación y reduce los términos semejantes del siguiente polinomio. $2a-\{2b+[-4-(3a-2b)+6a-b]\}=$ a) $6a+5b-8$ b) $5a-6b-8$ c) $-a-3b+4$ d) $-2a+3b+4$
3. ( )	Elimina los signos de agrupación y reduce los términos semejantes del siguiente polinomio. $4x^2+[-(x^2-xy)+(-3y^2+2xy)-(-3x^2+y^2)]=$ a) $8x^2+xy+2y^2$ b) $6x^2+3xy-4y^2$ c) $-6x^2-2xy+y^2$ d) $-8x^2-3xy-4y^2$

4. ( )	¿Cuál es la expresión algebraica que representa "la tercera parte de un número al cubo" ? a) $3\left(\frac{1}{3x^3}\right)$ b) $\frac{1}{3}\left(3x^3\right)$ c) $(3x)^3$ d) $\frac{1}{3}x^3$
5. ( )	¿Cuál es la expresión algebraica que representa "la suma de dos números entre su producto"? a) $\frac{xy}{x+y}$ b) $(x+y)(xy)$ c) $\frac{x+y}{xy}$ d) $\frac{x+y}{x-y}$
6. ( )	¿Cuál es la expresión algebraica que representa "la suma de los cuadrados de dos números"? a) a^2+b^2 b) $(a+b)^2$ c) $(a^2)(b^2)$ d) $2(a+b)^2$
7. ( )	Al restar los polinomios $\left(2x^2+x-10\right)-\left(x^2-2x-9\right)$ el resultado que se obtiene es: a) $-3x^2-x+1$ b) $-x^2+x-1$ c) x^2+3x-1 d) x^2-x+1

8. ( )	Al multiplicar $\left(\frac{1}{3}x^3\right)\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)\left(\frac{9}{6}xy^3\right)$, el resultado es: a) $\frac{1}{6}x^7y^4$ b) $-\frac{1}{3}x^6y^4$ c) $\frac{12}{12}x^5y^3$ d) $-\frac{18}{12}x^6y^3$
9. ( )	Al multiplicar $(x-y)$ por (x^2+xy+y^2), el resultado es: a) $x^3-2x^2y+2xy^2$ b) x^3+y^3 c) $x^3+2x^2y^2-2xy^3$ d) x^3-y^3
10.( )	Si divides $6+a^2+5a$ entre $a+2$, el resultado que obtienes es: a) $a-5$ b) $-a-3$ c) $a+3$ d) $-a+5$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Numero de pregunta	Respuesta correcta
1	a
2	c
3	b
4	d
5	c
6	a
7	c
8	b
9	d
10	c

Sugerencias

- Si te equivocaste en los reactivos 1, 2 ó 3, revisa los ejercicios resueltos y consulta el libro de Alfonse Gobran, Álgebra Elemental. pp. 73-75.
- Si te equivocaste en los reactivos 4, 5 ó 6, revisa los ejercicios resueltos y consulta el libro de Ortíz Campos, Matemáticas I, Álgebra. pp. 77-80.
- Si te equivocaste en los reactivos 7, 8, 9 ó 10, revisa los ejercicios resueltos y consulta el libro de Aurelio Baldor, Álgebra Elemental. pp. 63-70 y 79-87.

2.2 PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN.

APRENDIZAJES
• Desarrollar productos notables: $(x \pm a)^2; (x+a)(x+b); (x+a)(x-a); (x \pm a)^3$ • Desarrollar los casos de factorización de polinomios hasta de tercer grado. • Relacionar los diferentes casos de factorización con sus productos notables. • Transformar expresiones algebraicas racionales.

Los productos notables son multiplicaciones de expresiones algebraicas que se presentan con tanta frecuencia que es posible realizarlas de manera mecanizada.

A continuación se presentan los diferentes tipos de productos notables, así como las reglas que se aplican para su desarrollo.

- **Cuadrado de la suma o diferencia de dos cantidades:** $(x \pm a)^2$

Para el **cuadrado de la suma** se tiene la siguiente:

REGLA: *El cuadrado de la suma de dos cantidades* $(x+a)^2$ *es igual al cuadrado de la primera cantidad (x)^2, más el doble producto de la primera por la segunda cantidad 2(x)(a), más la segunda cantidad al cuadrado (a)^2*, por ejemplo:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

el **cuadrado de la diferencia** se tiene la siguiente:

REGLA: *El cuadrado de la diferencia de dos cantidades* $(x-a)^2$ *es igual al cuadrado de la primera cantidad (x)^2, menos el doble producto de la primera cantidad por la segunda 2(x)(a), más el cuadrado de la segunda (a)^2.* Esto es:

$$(x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$$

Elevar un binomio al cuadrado significa que el binomio se multiplica por sí mismo, esto lo podemos representar geométricamente:

b	*ab*	b^2
a	a^2	*ab*
	a	*b*

Los términos a^2 y b^2 son siempre positivos porque el cuadrado de un número positivo o negativo, es siempre positivo. El término 2*ab* puede ser negativo o positivo, dependiendo de los signos de *a* y *b*.

- **Producto de dos binomios que tienen un término común.**

REGLA: *El producto de dos binomios que tienen un término común (x+a)(x+b) se obtiene sumando algebraicamente el cuadrado del término común $(x)^2$, el producto de este término por la suma algebraica de los términos no comunes x(a+b), y el producto de estos dos últimos términos (a)(b), es decir*:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

por ejemplo: $(x+4)(x+3)=x^2+(4+3)x+(4)(3)=x^2+7x+12$

- **Producto de la suma por la diferencia de dos binomios (binomios conjugados).**

REGLA: *El producto de dos binomios conjugados (x+a)(x-a), es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.*

El producto de dos binomios conjugados recibe el nombre de diferencia de cuadrados.

Esto es: $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

- **El cubo de la suma o diferencia de un binomio:** $(x\pm a)^3$

Para el cubo de la suma de dos cantidades **se tiene la siguiente:**

REGLA: *El cubo de la suma de dos cantidades $(x+a)^3$ es igual al cubo de la primera cantidad $(x)^3$, más el triple producto del cuadrado de la primera cantidad por la segunda $3(x)^2(a)$, más el triple producto de la primera cantidad por el cuadrado de la segunda $3(x)(a)^2$, más el cubo de la segunda $(a)^3$.* Esto es:

$$(x+a)^3=x^3+3(x)^2(a)+3(x)(a)^2+(a)^3$$

$$=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$$

Para el **cubo de la diferencia de dos cantidades** se tiene la siguiente:

REGLA: *El cubo de la diferencia de dos cantidades: $(x-a)^3$ es igual al cubo de la primera cantidad $(x)^3$, menos el triple producto del cuadrado de la primera cantidad por la segunda $3(x)^2(a)$, más el triple producto de la primera cantidad por el cuadrado de la segunda $3(x)(a)^2$, menos el cubo de la segunda cantidad $(a)^3$.* Esto es:

$$(x-a)^3=(x)^3-3(x)^2(a)+3(x)(a)^2-(a)^3=$$

$$x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$$

Factorizar una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores. Se llama factores o divisores de una expresión algebraica, a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión algebraica.

A continuación se desarrollan los diferentes métodos de factorización.

- **Factorización de un polinomio que tiene un factor común.**

Sea el polinomio $ax + bx$ en el cual x es el factor común de sus términos; al dividir el polinomio entre el factor común, se obtiene:

$$\frac{ax+bx}{x}=\frac{ax}{x}+\frac{bx}{x}=a+b$$

Por lo tanto: $ax+bx = x(a+b)$

Un ejemplo de polinomio con factor común sería el siguiente.

$$18x \ -8x$$

Se obtiene el factor común que en este caso es 2*x.*

Por lo tanto: $2x\left(9x^2\right)-4$

- **Factorización por agrupación de términos.**

Sea el polinomio

$$ax+bx+ay+by$$

Observa que los dos primeros términos del polinomio tienen como factor común a "x" y los dos últimos términos tienen como factor común a "y".

Agrupando los términos que tienen factor común se obtiene:

$$x(a+b)+y(a+b)$$

Observa que $(a + b)$ es factor común de "x" y "y", entonces se agrupan los términos y se tiene como resultado.

$$(a + b)\ (x + y)$$

Por lo tanto:

$$ax+bx+ay+by=(a+b)(x+y)$$

También se puede ordenar el polinomio de la siguiente manera:

$$ax+ay+bx+by$$

Donde "*a*" es factor común de los dos primeros términos y "*b*" es factor de los dos últimos términos; entonces, agrupándolos tenemos:

$$a(x+y)+b(x+y)$$

Donde *(x + y)* es factor de "*a*" y "*b*", por lo tanto:

$$ax+ay+bx+by=(x+y)(a+b)$$

En ambos casos se puede comprobar la factorización, mediante la multiplicación.

- **Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.**

Se llama trinomio cuadrado perfecto al producto que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado. En consecuencia, factorizar un trinomio cuadrado perfecto significa encontrar el binomio que multiplicado por sí mismo dé como producto el trinomio cuadrado perfecto. Es decir:

Sí $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$,

entonces: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

REGLA: *Se ordena el trinomio con relación a una literal, se extrae la raíz cuadrada (positiva) al primero y tercer términos y se comprueba con estas cantidades, el doble producto.*

$$a^2+2ab+b^2$$

Paso 1: Se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término:

Primer término: $\sqrt{a^2}=a$; tercer término: $\sqrt{b^2}=b$

Paso 2: Con estos resultados se comprueba el doble producto: 2(*a*)(*b*) = 2*ab*

Paso 3: ¿Éste resultado (2*ab*) es igual al segundo término del trinomio? Sí, entonces se trata de un trinomio cuadrado perfecto.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

NOTA: El signo que separa al binomio está dado por el segundo término, o sea que si el segundo término es negativo, tenemos:

$$a^2-2ab+b^2$$

$$\sqrt{a^2}=a \qquad \sqrt{b^2}=b$$

$$2(a)(b)=2ab$$

Por lo tanto:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

- **Factorización de una diferencia de cuadrados.**

Una diferencia de cuadrados $(a^2 - b^2)$ se puede obtener a través del producto de dos binomios conjugados. Entonces factorizar una diferencia de cuadrados es buscar dos binomios conjugados cuyo producto sea la diferencia de cuadrados dada. Esto es:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- **Factorización de la suma y diferencia de cubos.**

La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores.

El cociente de *(a^3 + b^3)* entre *(a + b)*, es:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

Multiplicando ambos lados por *(a + b)*, se tiene:

$$\frac{(a^3 + b^3)(a + b)}{(a + b)} = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Simplificando:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

La **diferencia de dos cubos perfectos** se descompone en dos factores.

El cociente de *(a^3 - b^3)* entre *(a - b)* es:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

Multiplicando ambos lados por *(a - b)*, se tiene

$$\frac{(a^3 - b^3)(a - b)}{(a - b)} = a^2 + ab + b^2$$

Simplificando:

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

- **Factorización de un trinomio de la forma:** $x^2 + bx + c$

Los trinomios de esta forma, donde el coeficiente del término cuadrático es uno, son como el siguiente:

$$x^2 + 7x + 10$$

Para resolver este tipo de trinomios, éste se descompone en dos factores, donde el primer término es la raíz cuadrada (positiva) de "*x*".

$$x^2 + 7x + 10 = (x \qquad)(x \qquad)$$

Se buscan dos números que sumados den +7 (2° término del trinomio) y que multiplicados den 10 (3er. término del trinomio).

Estos números son:

5 + 2 = +7 y (+5)(+2) = +10

Por lo tanto:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$$

Se deben buscar dos números que sumados den el segundo término del trinomio y que multiplicados dichos números den el tercer término del trinomio.

- **Factorización de un trinomio de la forma:** $ax^2 + bx + c$**, donde a, b y c son los coeficientes del polinomio.**

Se realizará la factorización de un trinomio de esta forma con un ejemplo.

$$2x^2 + 5x + 3$$

Se multiplican los coeficientes del primero y tercer términos (2)(3) = 6, y se buscan dos números cuya suma sea 5 (coeficiente del segundo término), y el producto sea 6; estos números son 3 y 2, entonces el trinomio se puede escribir de la siguiente manera:

$$2x^2 + 5x + 3 = 2x^2 + 3x + 2x + 3$$

Agrupando términos

$$2x^2 + 5x + 3 = \left(2x^2 + 3x\right) + (2x + 3)$$

Factorizando:

$$2x^2 + 5x + 3 = x(2x + 3) + 1(2x + 3)$$

Observa que (2x + 3) es factor, además el coeficiente del último término es uno, entonces:

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

Para comprobar el resultado, se efectúa la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ \underline{x + 1} \\ 2x^2 + 3x \phantom{{}+ 3} \\ \underline{+ 2x + 3} \\ 2x^2 + 5x + 3 \end{array}$$

Que es el trinomio que se factorizó.

A continuación se define lo que es una expresión racional, así como las diversas aplicaciones de los diferentes métodos de factorización, explicados anteriormente.

Una **expresión racional**, también llamada **fracción algebraica**, es una expresión algebraica de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son polinomios y $b \neq 0$. Los siguientes son ejemplos de expresiones racionales.

$$\frac{x-6}{x}, \quad \frac{x^2+2x}{x-3}, \quad \frac{x}{x^2-4}$$

Para reducir expresiones racionales se debe tomar en cuenta lo siguiente:

1. Factorizamos el numerador y el denominador de la forma más completa posible.
2. Dividimos el numerador y el denominador entre los factores comunes.
3. Se reduce a su mínima expresión.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO.

Cuando se presenta una expresión racional como la siguiente, se aplican los métodos de factorización para simplificarla.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} =$$

Analiza el procedimiento utilizado en la solución del ejemplo.

Paso 1: Se factoriza el trinomio del numerador, buscando dos números que sumados den -2 y multiplicados den -3; estos números son -3 y +1, entonces tenemos que:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Paso 2: Sustituyendo estos valores en la expresión racional:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)}$$

Paso 3: Se simplifica y se obtiene el resultado

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = x + 1$$

Resuelve el siguiente ejercicio de simplificación de expresiones racionales.

Simplifica la siguiente expresión racional.

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} =$$

Paso 1: Factoriza el trinomio del numerador.

Paso 2: Reduce los términos y simplifica tu resultado a su mínima expresión.

E J E R C I C I O S

INSTRUCCIONES: Lee con atención los ejercicios y resuélvelos en hojas aparte. Escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. ( )	Al desarrollar $(x+3)^2$, el resultado es: a) x^2+6x+9 b) x^2+3x-9 c) x^2-6x+9 d) $x \quad -3x-9$
2. ( )	Al desarrollar $(x+8)(x-3)$, el resultado es: a) x^2-5x+5 b) $x^2+11x-5$ c) $x^2-11x+12$ d) $x^2+5x-24$
3. ( )	Al desarrollar $(x + 1)^3$, el resultado es: a) x^3+2x^2+3x-1 b) x^3+3x^2+3x+1 c) $x^3-3x-3x-1$ d) x^3-2x^2+3x+1
4. ( )	Al factorizar $ax-2ay-2bx+4by$, se obtiene: a) $(x-2y)(a-2b)$ b) $(x+2y)(x+2b)$ c) $(x-2y)(a+2b)$ d) $(x+a)(x-2b)$
5. ( )	Al factorizar $m^2+10m+21$, el resultado es: a) (m + 7) (m + 3) b) (m + 8) (m + 2) c) (m + 11) (m - 1) d) (m + 5) (m+2)

6. ( )	Al factorizar $5x^2 + 13x - 6$, el resultado es: a) $(x+7)(x+6)$ b) $(x+15)(x-2)$ c) $(x+9)(x-3)$ d) $(x+3)(5x-2)$
7. ( )	El producto notable del trinomio $x^2 - 2xy + y^2$ es: a) $(x+y)(x-y)$ b) $(x+y)^2$ c) $(x-y)^2$ d) (x^2+y^2)
8. ( )	Al desarrollar el producto notable $(3x-4)^2$, se obtiene: a) $9x^2 - 24x + 16$ b) $9x^2 + 12x + 16$ c) $9x^2 - 12x - 16$ d) $9x^2 - 24x - 16$
9. ( )	Al factorizar $x^2 + 7x - 18$, se obtiene: a) $(x+5)(x+2)$ b) $(x-6)(x-3)$ c) $(x+9)(x-2)$ d) $(x+4)(x+3)$

10.( )	Al simplificar la expresión $\dfrac{x^2-4}{5ax+10a}$, el resultado es: a) $\dfrac{x+2}{x(5a+10a)}$ b) $\dfrac{x-2}{5a}$ c) $\dfrac{x+2}{a(5x+10)}$ d) $\dfrac{x-2}{5a(x-10)}$
11.( )	Al simplificar la expresión $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$, el resultado es: a) $\dfrac{(x+5)(x+1)}{(x-3)^2}$ b) $\dfrac{(x-3)}{(x+3)^2}$ c) $\dfrac{x+2}{x-3}$ d) $\dfrac{x+2}{(x-3)(x-3)}$
12.( )	Al simplificar la expresión $\dfrac{x^2-25}{x^2-3x-10}$, se obtiene: a) $\dfrac{x^2+5}{x-5}$ b) $\dfrac{-x+5}{x+3}$ c) $\dfrac{-x-5}{-x-7}$ d) $\dfrac{x+5}{x+2}$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respueta correcta
1.	a
2.	d
3.	b
4.	a
5.	a
6.	d
7.	c
8.	a
9.	c
10.	b
11	c
12	d
Sugerencias	
• Si te equivocaste en los reactivos 1,2, ó 3, revisa las operaciones con productos notables, además consulta el libro de Aurelio Baldor, álgebra elemental. pp. 97-105. • Si te equivocaste en los reactivos 4, 5, ó 6, revisa los métodos de factorización y consulta el libro de Ortíz Campos, Francisco José, matemáticas I, álgebra. pp. 114-126. • Si te equivocaste en los reactivos 7, 8 ó 9, revisa el ejercicio resuelto y consulta el libro de Fuenlabrada, matemáticas 1, aritmética y álgebra. pp. 143-155.	

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Para resolver estos ejercicios cuentas con una hora treinta minutos.

A continuación se te presentan una serie de ejercicios, con la finalidad de que reafirmes tus conocimientos y habilidades para la solución de problemas. Realiza todas las operaciones en hojas aparte.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. ( )	Elimina los signos de agrupación y reduce los términos semejantes del siguiente polinomio. $-3a-5b+\{-2a+3b-(-3a-b)\}=$ a) $-2a-b$ b) $5a-3b$ c) $-3a+4b$ d) $-a-2b$
2. ( )	Reduce los términos semejantes, eliminando los signos de agrupación del siguiente polinomio. $2x+[-5x-4-(-2y+\{-x+y\}-6)]$ a) $5x-y-10$ b) $7x+y+10$ c) $-2x+y+2$ d) $-3x-y-2$
3. ( )	Elimina los signos de agrupación y reduce los términos semejantes del siguiente polinomio. $2a-[(a-b)-(2a+3b)-5]-b=$ a) $-5a+5b-5$ b) $2(a+b)-5$ c) $3a-2b+5$ d) $3(a+b)+5$

4. ( )	La expresión algebraica que representa *“el cociente de la suma de dos números entre su producto”* es: a) $\dfrac{x+y}{x-y}$ b) $\dfrac{a+b}{ab}$ c) $\dfrac{ab}{a+b}$ d) $\dfrac{x-y}{x+y}$
5. ( )	La expresión algebraica que representa *“el triple de la diferencia de dos números”* a) $3(a-b)$ b) $3x-y$ c) x^3-y^3 d) $a-b^3$
6. ( )	La expresión algebraica que representa *“el cociente de la diferencia de dos números entre el doble de su producto”* es: a) $2\left(\dfrac{a-b}{ab}\right)$ b) $\dfrac{x-y}{2xy}$ c) $\dfrac{2x-y}{x+y}$ d) $\dfrac{ab}{2a+b}$

7. ( )	Al multiplicar $\left(\frac{-3}{10}a^2x^3\right)$ por $(3a-5b+6c)$ se obtiene: a) $\frac{-3}{30}a^2x^3+\frac{3}{50}a^2x^3b-\frac{3}{16}a^2x^3c$ b) $\frac{-6}{10}a^3x^3-\frac{3}{2}a^2x^2b^2-\frac{9}{10}a^2cx^3$ c) $\frac{-9}{10}a^3x^3+\frac{3}{2}a^2x^3b-\frac{9}{5}a^2x^3c$ d) $\frac{-3}{13}a^3x^3-\frac{8}{10}a^2bx^3-\frac{3}{16}ac^2x^3$
8. ( )	Al realizar la operación $(a+3)(a-1)$ se obtiene: a) a^2+3a-1 b) a^2-2a+3 c) a^2-3a+1 d) a^2+2a-3
9. ( )	Al multiplicar (x^3+2x^2-x) por (x^2+2x) se obtiene: a) $x^5+4x^4+3x^3-2x^2$ b) $x^6+2x^4-3x^3+2x^2$ c) $x^5-2x^4-2x^3+3x^2$ d) $x^6-4x^5+3x^4-2x^2$
10.( )	Al dividir a^2-ab entre a, se obtiene: a) $a-a^2b$ b) $a-b$ c) $a^2-\frac{ab}{a}$ d) $a-\frac{b}{a}$

11.( )	Al dividir $x^2 - 3 + 2x$ entre $x + 3$, se obtiene: a) $2x + 1$ b) $-x + 1$ c) $-2x - 1$ d) $x - 1$
12.( )	Al dividir $a^2 + 30 - 11a$ entre $a - 6$, se obtiene: a) $-2a - 5$ b) $-a + 5$ c) $a - 5$ d) $2a + 5$
13.( )	Al desarrollar el producto notable $(2x + 3)(2x - 1)$, se obtiene: a) $4x^2 - 8x + 3$ b) $4x^2 + 4x - 3$ c) $2x^2 - 6x - 3$ d) $2x^2 + 4x + 3$
14.( )	Al desarrollar el producto notable $(4a + 9)(4a - 9)$, se obtiene: a) $16a^2 - 81$ b) $16a^2 - 18a + 81$ c) $16a^2 + 18$ d) $16a^2 + 18a - 81$
15.( )	Al desarrollar la expresión $(2x - 3)^3$, se obtiene: a) $8x^3 + 54x^2 - 36x + 27$ b) $8x^3 - 18x^2 + 36x - 27$ c) $8x^3 + 36x + 54x^2 + 27$ d) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

16.( )	Al factorizar $x^2 - a^2 + x - a^2 x$, se obtiene: a) $a^2(x-1)+(x-x^2)$ b) $(x+a)(x-a)$ c) $(x+1)(x-a^2)$ d) $a^2(x+1)(x-1)$
17.( )	Al factorizar $a^2 - 10a + 25$, se obtiene: a) $(a+5)(a-2)$ b) $(a-5)(a-5)$ c) $(a+5)(a-5)$ d) $(a-2)(a-5)$
18.( )	Al factorizar $3x^2 - 5x - 2$, se obtiene: a) $(3x+1)(x-2)$ b) $(3x+1)(3x-1)$ c) $(3x+2)(3x-1)$ d) $(x-3)(3x-2)$
19.( )	Al simplificar la expresión $\frac{2ax+4bx}{3ay+6by}$, se obtiene: a) $\frac{2ax}{3by}$ b) $\frac{2xb}{3ay}$ c) $\frac{2ab}{3y}$ d) $\frac{2x}{3y}$

20.( )	Al simplificar la expresión $\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$, se obtiene: a) $\frac{x+3}{x-3}$ b) $\frac{x^2+6}{x^2+3}$ c) $\frac{x+2}{x-3}$ d) $\frac{x+3}{x-2}$

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de reactivo	Respuesta correcta
1	a
2	c
3	d
4	b
5	a
6	b
7	c
8	d
9	a
10	b
11	d
12	c
13	b
14	a
15	d
16	c
17	b
18	a
19	d
20	c

Unidad III

Ecuaciones:
Modelos Generalizadores

3.1 ECUACIÓN DE PRIMER GRADO: COMO CASO PARTICULAR DE LA FUNCIÓN LINEAL.

APRENDIZAJES:

- Obtener ecuaciones de primer grado como modelos de diversos problemas numéricos, geométricos y/o de la vida real.
- Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita mediante transposición de términos y/o por aplicación de las propiedades.
- Resolver ecuaciones de primer grado que involucren signos de agrupación.
- Interpretar gráficamente la solución de una ecuación.

La ecuación es una igualdad que se verifica para un determinado valor de la variable o variables desconocidas que reciben el nombre de incógnitas.

Por ejemplo: $x + 3 = 8$, es una igualdad que sólo es cierta cuando la incógnita "x" es igual a 5 y es única.

Una ecuación lineal con una incógnita, también llamada ecuación de primer grado con una incógnita, es aquélla que sólo tiene una incógnita, cuyo exponente es la unidad.

Existen problemas que se pueden resolver por medio de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Por ejemplo: la suma de las edades de Juan y Pedro suman 46 años y Pedro tiene 10 años menos que Juan. En este caso se plantea el problema de la siguiente manera:

Sea x = edad de Juan.

Como Pedro tiene 10 años menos que Juan, entonces:

$x - 10$ = edad de Pedro

La suma de ambas edades es de 46 años, esto es:

$$x + (x-10) = 46$$

Más adelante se explicará cómo se resuelve este tipo de ecuaciones; lo importante de estos problemas es cómo plantearlos. Veamos otro problema.

La suma de tres números consecutivos es 78. Hallar dichos números.

Sabemos que para representar un número utilizamos cualquier letra del abecedario, utilicemos a "x" para representar a dicho número. El segundo número consecutivo será entonces (x+1), y el tercer número será (x+2). Entonces, la suma de tres números consecutivos, se puede representar como:

$$(x) + (x+1) + (x+2) = 78$$

Antes de continuar es necesario conocer el procedimiento algebraico de ese tipo de ecuaciones.

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, debes usar las **propiedades de campo de los números reales** (ver Unidad I).

Toda igualdad se conserva siempre que se realice la misma operación y con los mismos números en ambos lados de ésta, con excepción de la división entre cero.

Para encontrar la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita, aplica la siguiente

REGLA GENERAL:

1) Se efectúan las operaciones indicadas que aparecen en la igualdad.

2) Se hace la transposición de términos, reuniendo en un lado de la igualdad todos los términos que contengan la incógnita y en el otro lado de la igualdad las cantidades conocidas, cambiando sus signos.

3) Se reducen términos semejantes en cada lado de la igualdad.

4) Se despeja la incógnita, dividiendo ambos lados de la igualdad entre el coeficiente de la incógnita.

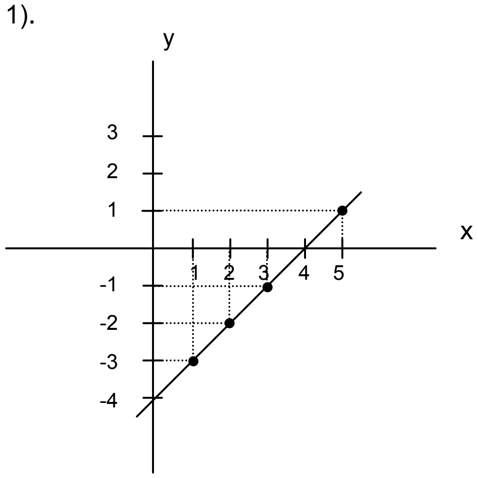
Para comprobar el resultado, se sustituye este valor en la ecuación original y se realizan las operaciones indicadas; si se cumple la igualdad, el resultado es correcto.

Existe otro método que se conoce como **"método gráfico"**, que consiste en la representación gráfica de la ecuación de primer grado con dos incógnitas en el plano cartesiano.

El plano cartesiano es aquél que contiene dos rectas numéricas perpendiculares (formando ángulos de 90°), las cuales se intersectan en un punto llamado origen. A los valores de la recta horizontal (eje x) se les llama "<u>abscisas</u>" y se representan por lo general con la letra "x". A los valores considerados sobre la recta vertical (eje y), se les llama "<u>ordenadas</u>" y se representan por lo general con la letra "y".

Para representar un punto o puntos en el plano cartesiano, se toman parejas (x, y), esto es; si a la variable "x" se le asignan valores, se obtienen sus correspondientes "y".

Por ejemplo: (0, -4), (2, -2), (3, -1), (4, 0), (5, 1).



Observa que en la gráfica anterior, el primer número de las parejas es el valor que toma "x" y el segundo es el valor que toma "y". Al representar estos puntos en el plano cartesiano y unirlos con un trazo continuo se obtiene una línea recta.

En general, una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ (con A y B distintos de cero), se llama **"ecuación lineal con dos variables" porque su gráfica es una recta.** A la variable "x" se le llama **"variable independiente"** y a la variable "y" se le llama **"variable dependiente".**

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO.

Es importante recordar que un problema lo podemos representar por medio de ecuaciones que al resolverlas darán solución al problema. Recuerda que una ecuación de primer grado es una igualdad y que se comprueba para un determinado valor de la incógnita y es único. Existen problemas que se pueden resolver utilizando este tipo de ecuaciones.

EJEMPLO:

La suma de las edades de Juan y Pedro suman 46 años y Pedro es 10 años menor que Juan. Encontrar las edades de Juan y Pedro.

Analiza el procedimiento utilizado en la solución del ejemplo.

Paso 1: Plantear el problema, de la siguiente forma:

Sea x la edad de Juan.

Paso 2: Pedro tiene 10 años menos que Juan, esto es:

$x - 10 =$ Edad de Pedro.

Paso 3: La suma de ambas edades es de 46 años, de esta forma obtenemos la siguiente ecuación de primer grado con una incógnita:

$$x + (x - 10) = 46$$

Paso 4: Resolvemos esta ecuación eliminando los signos de agrupación y respetando las reglas de los signos. Esto es:

$$x + x - 10 = 46$$

Paso 5: Se agrupan de un lado de la igualdad todos los términos semejantes y del otro lado todas las cantidades, recuerda que -10 al pasarlo al otro lado de la igualdad se le cambia de signo. Esto es:

$$x + x = 46 + 10$$

$$2x = 56$$

Paso 6: Se divide toda la ecuación entre el coeficiente de la incógnita, es decir entre dos.

$$\frac{2x}{2} = \frac{56}{2}$$

Se simplifica y se obtiene:

$$x = 28$$

Esto significa que Juan tiene 28 años. Como la edad de Pedro es x - 10; entonces:

28 - 10 = 18 años.

Por lo tanto, las edades son:

Edad de Juan: 28 años.

Edad de Pedro: 18 años.

Ahora resuelve el siguiente problema, siguiendo los pasos del ejercicio anterior.

La suma de las edades de Carmen y Laura suman 33 años y Carmen es tres años menor que Laura. Encontrar las edades de Carmen y Laura.

Paso 1: Plantea el problema con una ecuación de primer grado con una incógnita.

Paso 2: Resuelve la ecuación.

Paso 3: Realiza la comprobación, sustituyendo tu respuesta en la ecuación y si se cumple la igualdad, tu resultado es correcto; en caso contrario revisa el ejercicio anterior.

EJEMPLO: En el siguiente problema, se muestra la interpretación gráfica de una ecuación de primer grado con dos variables.

Representa en el plano cartesiano la ecuación y = x-3, para valores de x = 0, 1, 2 y 3.

Analiza el procedimiento utilizado en la solución del ejemplo.

Paso 1: Se sustituyen los valores de “x”, en la ecuación original.

Si x = 0; y = 0 - 3 = -3

Si x = 1; y = 1 - 3 = -2

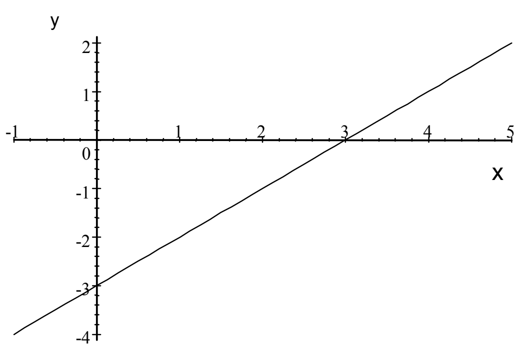
Si x = 2; y = 2 - 3 = -1

Si x = 3; y = 3 - 3 = 0

Paso 2: Se forman las parejas (x, y). Estas parejas (puntos) se representan en la siguiente tabla:

x	y = x -3	(x, y)
0	y = 0 - 3 = -3	A(0, -3)
1	y = 1 - 3 = -2	B(1, -2)
2	y = 2 - 3 = - 1	C(2, -1)
3	y = 3 - 3 = 0	D(3, 0)

Paso 3: Se representan estos puntos en el plano cartesiano.



Ahora, resuelve el siguiente problema:

Representa en el plano cartesiano la ecuación $y = x + 5$, para valores de $x= -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3

Paso 1: Sustituye los valores de “x” en la ecuación

Paso 2: Elabora una tabla para las parejas (x, y).

Paso 3: Elabora la gráfica.

E J E R C I C I O S

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos, resuélvelos en hojas aparte y escribe en el paréntesis de la izquierda la respuesta correcta.

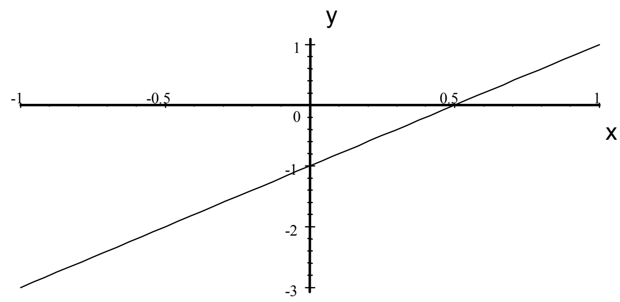
1. ( )	La edad de Andrés es el doble que la edad de Ana y ambas edades suman 39 años. ¿Cuáles son las edades de Andrés y Ana? a) Andrés: 26 años. Ana: 13 años. b) Andrés: 25 años. Ana: 14 años. c) Andrés: 24 años. Ana: 15 años. d) Andrés: 23 años. Ana: 16 años.
2. ( )	La suma de las edades de María y Pablo es de 65 años y María es 15 años menor que Pablo. ¿Cuales son las edades de María y Pablo? a) María: 15 años. Pablo: 50 años. b) María: 20 años. Pablo: 45 años. c) María: 25 años. Pablo: 40 años. d) María: 30 años. Pablo: 35 años.
3. ( )	La suma de tres números enteros consecutivos es de 186. ¿Cuáles son estos números? a) Primer número: 62 Segundo número: 63 Tercer número: 64 b) Primer número: 61 Segundo número: 62 Tercer número: 63 c) Primer número: 60 Segundo número: 61 Tercer número: 62 d) Primer número: 59 Segundo número: 60 Tercer número: 61

4. ( )	Al resolver la ecuación $5x + 6 = 10x + 5$, el valor de la incógnita es: a) x = 10/3 b) x = 4/7 c) x = 2/9 d) x = 1/5
5. ( )	Al resolver la ecuación $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$, el valor de la incógnita es: a) x = 6 b) x = 4 c) x = 10/3 d) x = 3/2
6. ( )	Al resolver la ecuación $3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x - x + 24$, el valor de la incógnita es: a) x = 2 b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = -\frac{1}{2}$ d) x = -2
7. ( )	Al resolver la ecuación $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$, el valor de la incógnita es: a) x = - 9/2 b) x = -5/4 c) x = 2/7 d) x = 1/3

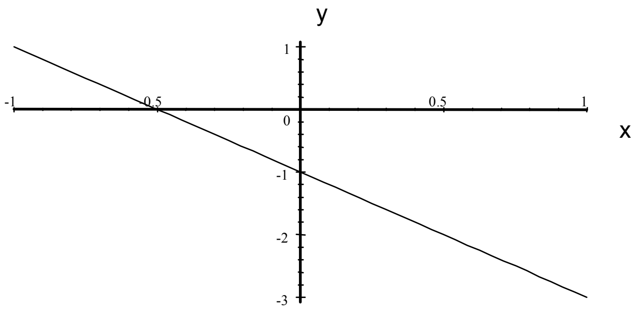
8. ( )	Al resolver la ecuación $x-(2x+1)=8-(3x+3)$, el valor de la incógnita es: a) x = 12 b) x =6 c) x =5 d) x =3
9. ( )	Al resolver la ecuación $x-(-3x+3)=6-(8x+12)$, el valor de la incógnita es: a) $x=\frac{-21}{4}$ b) $x=-\frac{3}{4}$ c) $x=-\frac{1}{4}$ d) $x=\frac{15}{4}$

10. (   ) La gráfica que representa la ecuación $y = 2x - 1$, es:

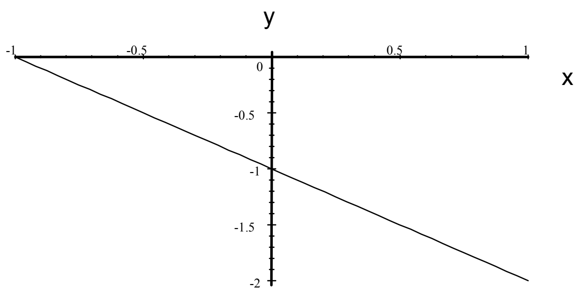
a)



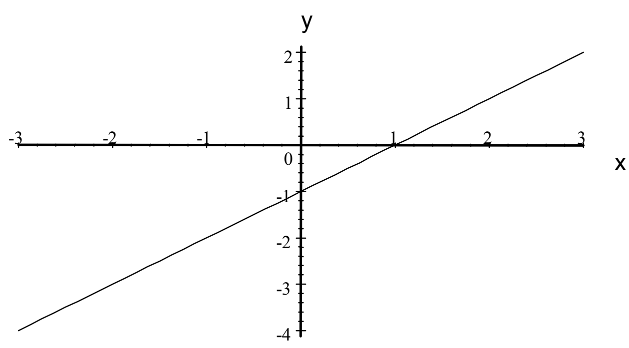
b)



c)

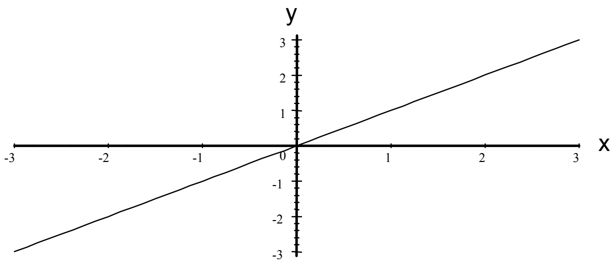


d)

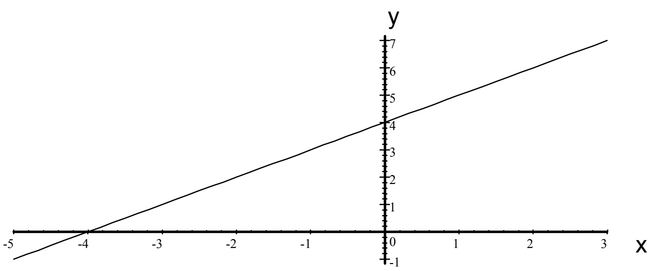


11. (   ) La gráfica que representa la ecuación y = -x+4 es:

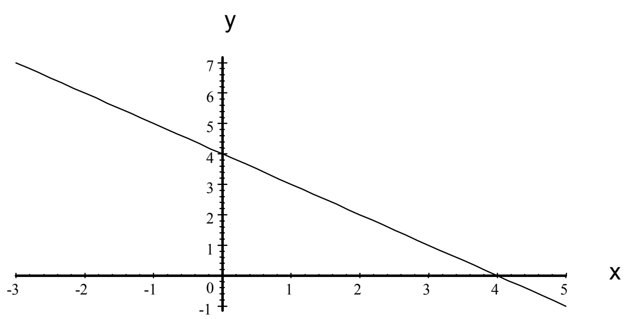
a)



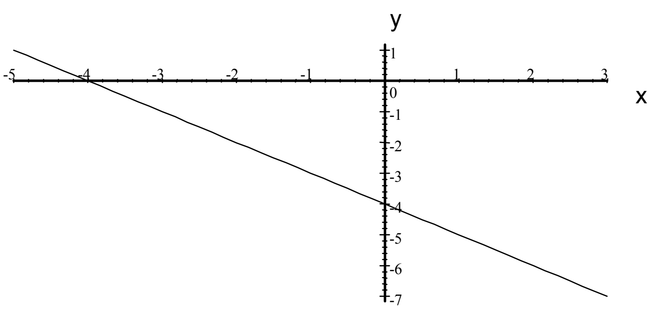
b)



c)



d)



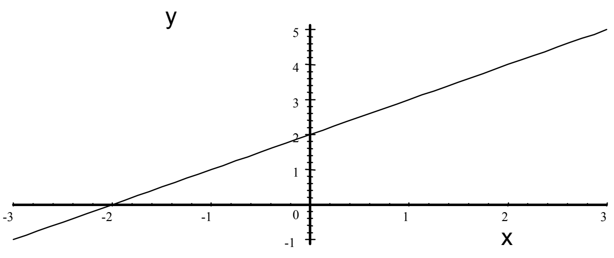
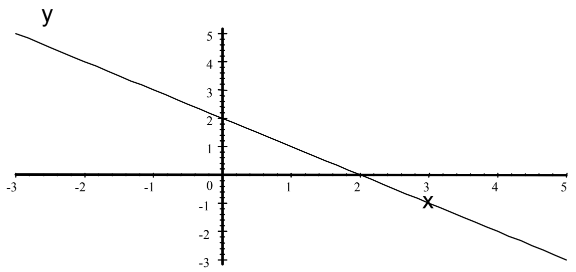
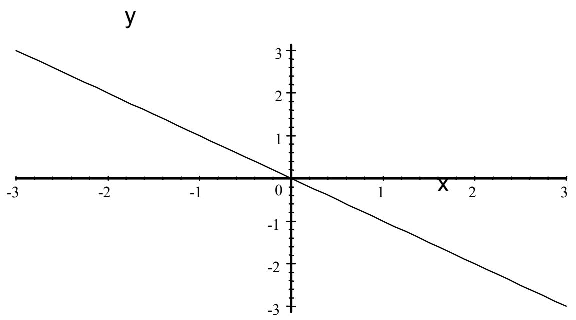
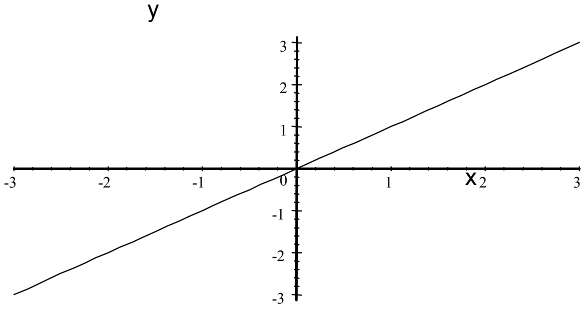
12. ( )	La gráfica que representa la ecuación y = x es: a)  b)  c)  d) 

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	a
2	c
3	b
4	d
5	a
6	d
7	a
8	d
9	c
10	a
11	c
12	d

Sugerencias

- Si te equivocaste en los reactivos 1, 2 ó 3, revisa el ejercicio resuelto y consulta el libro de Ortíz Campos, Matemáticas I, Álgebra. pp. 135 - 140.
- Si te equivocaste en los reactivos 4, 5, 6, 7, 8 ó 9, revisa el ejercicio resuelto y consulta el libro de Aurelio Baldor, Álgebra Elemental. pp. 122-130.
- Si te equivocaste en los reactivos 10, 11 ó 12, revisa el ejercicio resuelto y consulta el libro de Ortíz Campos, Matemáticas I, Álgebra pp. 174-178.

3.2 SISTEMA DE ECUACIONES.

APRENDIZAJES
• Obtener sistemas de ecuaciones de primer grado como modelos de diversos problemas numéricos, geométricos y/o de la vida real. • Representar gráficamente en el plano cartesiano a un sistema de ecuaciones simultáneas. • Resolver un sistema de ecuaciones simultáneas por el método de igualación. • Resolver un sistema de ecuaciones simultáneas por el método de reducción (suma y resta). • Resolver un sistema de ecuaciones simultáneas por el método de sustitución. • Representar gráficamente ecuaciones de dos incógnitas en el plano cartesiano. • Resolver sistemas de ecuaciones simultáneas por el método de determinantes. • Resolver problemas de diversas áreas cuyo modelo algebraico es un sistema de ecuaciones.

La agrupación de dos o más ecuaciones forma un sistema de ecuaciones. Dichos sistemas se clasifican por el número y el tipo de ecuaciones que los forman. Al sistema formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se le conoce como un sistema de dos por dos. Si el sistema está formado por tres ecuaciones y tres incógnitas, se le llama sistema de tres por tres. **La parte importante de un sistema de ecuaciones es aprender a construirlos, y saber resolverlos.**

Por ejemplo: el precio del boleto de entrada al cine es de $40.00 por adulto y $30.00 por niño. Si se vendieron en total 50 boletos y se obtuvieron ingresos por $1,700. ¿Cuántos adultos y cuántos niños entraron al cine?

Para resolver dicho problema debemos construir un sistema de ecuaciones y posteriormente resolverlo por un método algebraico.

Paso 1: Sea "x" el boleto de adulto y "y" el boleto de niño.

$x =$ boleto de adulto

.$y =$ boleto de niño

Paso 2: Se vendieron en total 50 boletos; esto quiere decir que "x" boletos de adulto más "y" boletos de niño suman 50. Esto es:

$$x + y = 50$$

Paso 3: El boleto de adulto es de $40.00 y el boleto de niño es de $30.00; si se obtuvieron ingresos por $1,700.00, esto lo podemos representar con la ecuación siguiente:

$$40x + 30y = 1700$$

Paso 4: De esta forma se obtiene el sistema de ecuaciones

$$x + y = 50 \qquad ...(1)$$
$$40x + 30y = 1700 \qquad ...(2)$$

Paso 5: Para resolver el sistema de ecuaciones por un método algebraico; aplicamos el **método de suma y resta.**

Paso 6: Se multiplica la ecuación (1) por (40) y la ecuación (2) por (-1);

*(Recuerda que **el método de suma y resta consiste en "eliminar" una de las variables (x) o (y)**; en este caso se eliminará a la "x")*

$$40x + 40y = 2000 \qquad \text{...........(3)}$$
$$-40x - 30y = -1700 \qquad \text{...........(4)}$$

Paso 7: Se suman las ecuaciones (3) y (4), obteniendo:

$$10y = 300$$

Paso 8: Se despeja la variable "y" y se obtiene que:

$$y = \frac{300}{10} = 30$$

Paso 9: Se sustituye el valor de y = 30 en cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2). Por lo general se sustituye en la ecuación más simple, sustituyendo la ecuación (1).

$$x + y = 50$$
$$x + 30 = 50$$

Paso 10: Se despeja la variable y se obtiene que:

$$x = 50 - 30$$
$$x = 20$$

Por lo tanto, los valores de "x" y "y" son: x = 20; y = 30

Realicemos la comprobación, sustituyendo estos valores en las ecuaciones originales y si se cumplen las igualdades, los resultados son correctos.

De la ecuación (1)

$$x + y = 50$$
$$20 + 30 = 50$$

50 = 50, se cumple la igualdad.

De la ecuación (2)

$$40x + 30y = 1700$$

$$40\,(20) + 30(30) = 1700$$

$$800 + 900 = 1700$$

1700 = 1700; se cumple la igualdad.

Por lo tanto, entraron al cine 20 adultos (x = 20) y 30 niños (y = 30).

Existen varios métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones.

- **MÉTODO GRÁFICO.**

La gráfica de cualquier ecuación lineal de la forma Ax + By = C es una recta. Cuando tenemos un sistema de ecuaciones, la solución de este sistema es el punto de intersección de las dos rectas. Observa los pasos para representar gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$x + y = 6$	ecuación 1
$5x - 4y = 12$	ecuación 2

Paso 1: Despejar de la ecuación (1), la variable y.

$$y = -x + 6$$

Paso 2: Dar valores cualquiera a "x" y se encuentra el valor de "y", como se observa en la tabla No. 1.

Tabla No. 1

x	y = -x+6	(x, y)
0	-0 + 6 = 6	(0, 6)
1	-1 + 6 = 5	(1, 5)
2	-2 + 6 = 4	(2, 4)
3	- 3 + 6 = 3	(3, 3)

Las parejas (x, y) se representan en el plano cartesiano.

Paso 3: Se despeja el valor de "y" de la ecuación (2).

$$5x - 12 = 4y$$

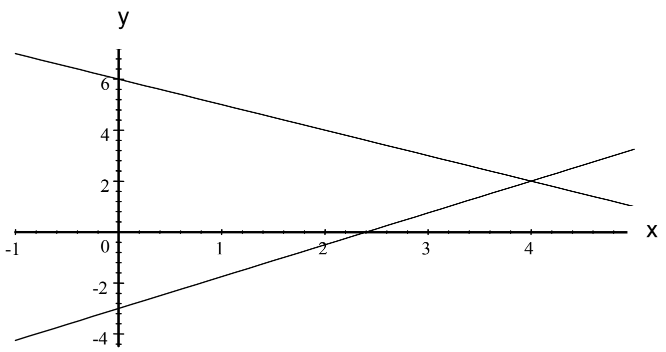
$$y = \frac{5}{4}x - \frac{12}{4} \quad \text{ó} \quad y = \frac{5}{4}x - 3$$

Paso 4: Se dan valores cualquiera a "x" y se obtiene el valor de "y", como se observa en la tabla No. 2.

Tabla No. 2

x	$y = \frac{5}{4}x - 3$	*(x, y)*
0	$\frac{5}{4}(0) - 3 = -3$	(0, −3)
2	$\frac{5}{4}(2) - 3 = \frac{10}{4} - 3 = -\frac{1}{2}$	(2, −1/2)
4	$\frac{5}{4}(4) - 3 = \frac{20}{4} - 3 = 2$	(4, 2)
6	$\frac{5}{4}(6) - 3 = \frac{30}{4} - 3 = \frac{9}{2}$	(6, 9/2)

Paso 5: Se grafican en el plano cartesiano los puntos de las tablas 1 y 2.



Observa en la gráfica que el punto de intersección de las dos rectas es cuando x = 4; y = 2, lo que indica que estos valores son la solución al sistema de ecuaciones. ¿Cómo comprobamos que son ciertos estos valores? Para realizar la comprobación del sistema de ecuaciones, se sustituyen los valores de x = 4 y y = 2 en las dos ecuaciones originales; si se cumplen las igualdades en cada caso, se dice que los valores son los correctos, esto es:

De la ecuación (1):

x + y = 6
4 + 2 = 6
6 = 6

Se cumple la igualdad.

De la ecuación (2):

5x - 4y = 12
(4) - 4 (2) = 12
20 - 8 = 12
12 = 12

Se cumple la igualdad. Por lo tanto, los valores de x = 4; y = 2 son correctos.

Utilizando el ejemplo anterior, aplicaremos los diferentes métodos algebraicos en la solución de sistemas de ecuaciones, con la finalidad de verificar que los valores de “x” y “y”, son los mismos.

- **MÉTODO DE IGUALACIÓN.**

Este método consiste en despejar la misma variable de cada ecuación e igualarlas, obteniendo de esta manera una ecuación de primer grado con una incógnita. Se resuelve esta ecuación y se obtiene el valor de una de las variables. Para obtener el valor de la otra variable, se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones el valor encontrado y se realiza la comprobación.

$$x + y = 6 \qquad \text{..... (1)}$$
$$5x - 4y = 12 \qquad \text{..... (2)}$$

Se despeja la misma variable de cada ecuación.

Paso 1: De la ecuación (1), despejamos a “y”

$$x + y = 6$$
$$y = 6 - x \qquad \text{.... (3)}$$

Paso 2: De la ecuación (2), despejamos a “y”.

$$5x - 4y = 12$$
$$5x - 12 = 4y$$

$$\frac{5}{4}x - \frac{12}{4} = y$$

$$y = \frac{5}{4}x - 3 \qquad \text{...(4)}$$

Paso 3: Se igualan las ecuaciones (3) y (4).

$$6 - x = \frac{5}{4}x - 3$$

Paso 4: Agrupando términos semejantes

$$6 + 3 = \frac{5}{4}x + x$$

$$9 = \frac{5}{4}x + x \qquad (5)$$

Paso 5: Multiplicando por 4 la ecuación (5), se obtiene lo siguiente:

$$9(4)=\frac{5}{4}(4)x+4x$$

36 = 5x + (4)x
36 = 9x .... (6)

Paso 6: Dividiendo entre 9, la ecuación (6)

$$\frac{36}{9}=\frac{9}{9}x$$

4 = x ó x = 4

Paso 7: Para obtener el valor de "y", se sustituye x = 4 en la ecuación (1) ó (2). Sustituyendo en (1).

x + y = 6

4 + y = 6

y = 6 - 4

y = 2

Para realizar la comprobación, se sustituyen los valores encontrados en las ecuaciones (1) y (2) y si se cumplen las igualdades, se dice que los valores para "x" y "y" son los correctos.

Sustituyendo x = 4 ; y = 2 en la ecuación (1), tenemos:

x + y = 6

4 + 2= 6

6 = 6 ; se cumple la igualdad.

Sustituyendo x = 4 ; y = 2 en la ecuación (2), tenemos:

5x - 4y = 12

5(4) - 4(2) = 12

20 - 8 = 12

12 = 12 ; se cumple la igualdad.

Por lo tanto, los valores de x = 4 ; y = 2 son los correctos.

- **MÉTODO DE REDUCCIÓN (SUMA Y RESTA).**

$$x + y = 6 \quad \text{.... (1)}$$
$$5x - 4y = 12 \quad \text{.... (2)}$$

Este método consiste en eliminar una de las variables, para encontrar el valor de la otra variable.

Paso 1: Multiplicamos la ecuación (1) por 4, para que al sumarla con la ecuación (2) se elimine la variable "y", esto es:

$$4(x) + 4(y) = 4(6)$$
$$4x + 4y = 24 \quad \text{... (3)}$$

Paso 2: Sumando las ecuaciones (3) y (2) tenemos:

$$4x + 4y = 24 \quad \text{....(3)}$$
$$5x - 4y = 12 \quad \text{....(2)}$$

$$9x = 36 \quad \text{....(4)}$$

Paso 3: Dividiendo entre 9 la ecuación (4)

$$\frac{9}{9}x = \frac{36}{9}$$

$$x = 4$$

Paso 4: Sustituyendo el valor de $x = 4$ en la ecuación (1) se obtiene el valor de "y", esto es:

$$x + y = 6$$
$$4 + y = 6$$

Paso 5: Despejando la variable "y" se obtiene:

$$y = 6 - 4$$
$$y = 2$$

Para realizar la comprobación, se sustituyen los valores de $x = 4$; $y = 2$ en las ecuaciones (1) y (2).

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$x + y = 6$$
$$4 + 2 = 6$$

$6 = 6$; se cumple la igualdad.

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$5x - 4y = 12$$

$$5(4) - 4(2) = 12$$

$$20 - 8 = 12$$

$12 = 12$; se cumple la igualdad.

Por lo tanto, los valores de $x = 4$; $y = 2$ son correctos.

- **MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.**

Este método consiste en despejar una variable de una ecuación y sustituirla en la otra ecuación, se resuelve ésta y se obtiene un valor de una de las variables. Para encontrar el valor de la otra variable, se sustituye el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$7x + y = 6 \qquad \ldots (1)$$
$$5x - 4y = 12 \qquad \ldots (2)$$

Paso 1: De la ecuación (2) despejamos a la variable "x", esto es:

$$5x - 4y = 12$$

$$5x = 12 + 4y$$

$$x = \frac{12 + 4y}{5}$$

Paso 2: Se sustituye este valor de "x" en la ecuación (1), así tenemos que:

$$\frac{12 + 4y}{5} + y = 6$$

Paso 3: Multiplicamos toda la ecuación por 5 para trabajar con números enteros, que es más fácil.

$$\frac{12 + 4y}{5}(5) + (5)y = 6(5)$$

$$12 + 4y + 5y = 30$$

Paso 4: Agrupando términos semejantes, se tiene que:

$$9y + 12 = 30$$

$$9y = 30 - 12$$

$$9y = 18$$

$$y = \frac{18}{9}$$

$$y = 2$$

Paso 5: Sustituyendo el valor de y = 2 en la ecuación (1), se obtiene el valor de la otra variable:

$$x + y = 6$$

$$x + 2 = 6$$

$$x = 6 - 2$$

$$x = 4$$

Para realizar la comprobación, se sustituyen los valores de “x” y “y” en las ecuaciones originales.

Sustituyendo los valores de “x” y “y” en la ecuación (1), tenemos que:

$$x + y = 6$$

$$4 + 2 = 6$$

$$6 = 6; \quad \text{se cumple la igualdad.}$$

Sustituyendo los valores de “x” y “y” en la ecuación (2), tenemos

$$5x - 4y = 12$$

$$5(4) - 4(2) = 12$$

$$20 - 8 = 12$$

$$12 = 12 \quad \text{se cumple la igualdad.}$$

Por lo tanto, los valores de $x = 4$; $y = 2$ cumplen con el sistema de ecuaciones.

- **MÉTODO DE DETERMINANTES (REGLA DE CRAMER).**

Para resolver sistemas utilizando el método de determinantes, utilizamos un sistema general con dos incógnitas.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad ....(1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad ....(2)$$

Paso 1: Multiplicando la ecuación (1) por b_2 y la ecuación (2) por ($-b_1$), se obtiene:

$$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \qquad ...(3)$$

$$-a_2b_1x - b_1b_2y = -c_2b_1 \qquad ...(4)$$

Paso 2: Sumando las ecuaciones (3) y (4), se tiene:

$$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1$$

Paso 3: Factorizando "x" y despejándola, tenemos:

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

donde $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$

Paso 4: Para encontrar el valor de "y", multiplicamos la ecuación (1) por ($-a_2$) y la ecuación (2) por (a_1), obteniendo:

$$-a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \qquad ...(5)$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \qquad ...(6)$$

Paso 5: Sumando las ecuaciones (5) y (6), tenemos:

$$a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1$$

Paso 6: Factorizando "y" y despejando se tiene:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Observa que los denominadores de “x” y “y” son iguales. A este arreglo se le denomina determinante del sistema y se denota de la siguiente manera:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Nota: Observa que un determinante del sistema equivale al producto de los términos que están en la diagonal principal menos el producto de los términos que pertenecen a la diagonal secundaria.
De acuerdo con las ecuaciones para “x” y “y”, se tienen las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

En algunas ocasiones se tiene la necesidad de trabajar con más de dos variables. Analicemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, aplicando el método de determinantes. (Regla de Cramer)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Para formar el determinante, se ordenan los coeficientes del sistema como sigue:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

De forma similar, como se realizó la deducción del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede determinar que:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

De esta manera, se obtienen las fórmulas para calcular los valores de x, y y z, como se indica a continuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Recuerda que los valores de $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ y c_3, son los coeficientes de las incógnitas x, y y z, respectivamente y los valores de $d_1, d_2, y\ d_3$, son los valores de los términos independientes de cada ecuación.

Una forma de calcular el determinante, es repitiendo las dos primeras columnas y multiplicándolas en forma diagonal como indican las flechas.

$$D = \begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

Es decir:

$$D = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

De la misma forma se obtienen x, y y z.

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - c_1b_2d_3 - d_1c_2b_3 - b_1d_2c_3}{D}$$

$$y = \frac{a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - c_1d_2a_3 - a_1c_2d_3 - d_1a_2c_3}{D}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - d_1b_2a_3 - a_1d_2b_3 - b_1a_2d_3}{D}$$

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO.

En el siguiente ejercicio se aplica el método de determinantes en la solución de un sistema de ecuaciones.

EJEMPLO: Se tienen $175.00 en 26 monedas de $5.00 y $10.00. ¿Cuántas monedas son de $5.00 y cuántas de $10.00?

Paso 1: Se asigna una letra (variable) a las monedas de $5.00 y otra a las monedas de $10.00.

x = monedas de $5.00

y = monedas de $10.00

Paso 2: Se encuentra el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 26 \quad (1)$$
$$5x + 10y = 175 \quad (2)$$

Paso 3: Se resuelve el sistema de ecuaciones, utilizando el método de determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 1 \\ 175 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(26)(10)-(1)(175)}{(1)(10)-(1)(5)} = \frac{260-175}{10-5} = \frac{85}{5} = 17$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 26 \\ 5 & 175 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(175)-(26)(5)}{(1)(10)-(1)(5)} = \frac{175-130}{10-5} = \frac{45}{5} = 9$$

Paso 4: Se comprueban los resultados, sustituyendo éstos en las ecuaciones (1) y (2).

En la ecuación (1), tenemos:

17 + 9 = 26

26 = 26; se cumple la igualdad.

En la ecuación (2), se tiene:

5(17) + 10(9) = 175

85 + 90 = 175

175 = 175; se cumple la igualdad.

Por lo tanto, el resultado es:

17 monedas de $ 5.00 y

9 monedas de $10.00

En el siguiente sistema de ecuaciones de tres por tres aplicaremos también el método de determinantes para encontrar la solución.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} x-2y-3z&=3 \quad ...(1)\\ x+y-z&=2 \quad ...(2)\\ 2x\text{-}3y\text{-}5z&=5 \quad ...(3) \end{aligned}$$

Paso 1: Se forma el determinante "D" y se calcula su valor.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$D=(1)(1)(-5)+(-2)(-1)(2)+(-3)(1)(-3)-(-3)(1)(2)-(1)(-1)(-3)-(-2)(1)(-5)$$

Realizando las operaciones indicadas se obtiene que $D=1$

Paso 2: Se forma el determinante para cada una de las incógnitas y se calcula su valor respectivo.

Para "x" tenemos que:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ 5 & -3 & -5 \end{vmatrix}}{1}$$

$$x=\frac{(3)(1)(-5)+(-2)(-1)(5)+(-3)(2)(-3)-(-3)(1)(5)-(3)(-1)(-3)-(-2)(2)(-5)}{1}$$

$$x=-1$$

Para "y" tenemos que:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{1}$$

$$y = \frac{(1)(2)(-5)+(3)(-1)(2)+(-3)(1)(5)-(-3)(2)(2)-(1)(-1)(5)-(3)(1)(-5)}{1}$$

$$y = 1$$

Para “z” tenemos que:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}}{1}$$

$$z = \frac{(1)(1)(5)+(-2)(2)(2)+(3)(1)(-3)-(3)(1)(2)-(1)(2)(-3)-(-2)(1)(5)}{1}$$

$$z = -2$$

Paso 3: Con los valores de $x = -1,\ y = 1\ y\ z = -2$, realizamos la comprobación sustituyendo en las tres ecuaciones originales dichos valores y si se cumplen las igualdades a éstas, se dice que la solución es la correcta.

De la ecuación (1)

$$\begin{aligned} &x - 2y - 3z = 3 \\ &-1 - 2(1) - 3(-2) = 3 \\ &-1 - 2 + 6 = 3 \\ &-3 + 6 = 3 \\ &3 = 3, \qquad se\ \ cumple\ \ la\ \ igualdad \end{aligned}$$

De la ecuación (2)

$$\begin{aligned} &x + y - z = 2 \\ &-1 + 1 - (-2) = 2 \\ &-1 + 1 + 2 = 2 \\ &-1 + 3 = 2 \\ &2 = 2, \qquad se\ \ cumple\ \ la\ \ igualdad \end{aligned}$$

Para la ecuación (3), se tiene:

$$\begin{aligned}
&2x-3y-5z=5\\
&2(-1)-3(1)-5(-2)=5\\
&-2-3+10=5\\
&-5+10=5\\
&5=5, \qquad \textit{se cumple la igualdad}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas son:

$$x=-1, \quad y=1 \quad y \quad z=-2.$$

Ahora resuelve el siguiente problema:

Tres sombreros y cuatro corbatas costaron $1560.00, y dos sombreros y tres corbatas, a los mismos precios, costaron $1070.00. Encuentra el costo de un sombrero y de una corbata.

Paso 1: Identifica cada artículo (sombrero y corbata) con una literal.

Paso 2: Encuentra el sistema de ecuaciones.

Paso 3: Resuelve las ecuaciones por un método algebraico.

Paso 4: Sustituye en las ecuaciones originales y realiza la comprobación.

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos, resuélvelos en hojas aparte y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

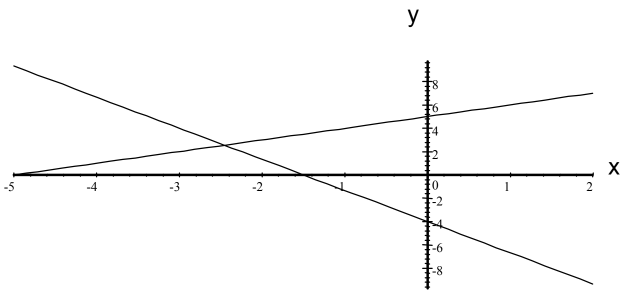
1. ( )	El sistema de ecuaciones que representa al problema “la suma de dos números es 50 y su diferencia es de 14” es: a) a + b = 50 a - 14 = b b) a - 50 = b a + b = 14 c) a + b = 50 a + 14 =b d) a + 50 = b a - b = 14
2. ( )	Mary tiene un total de 18 monedas. Si las monedas son de 10 y 25 centavos de dólar y el valor total de las monedas es de $3.60, ¿cuál es el sistema de ecuaciones que representa al problema? a) 0.1x + 0.25y = -3.60 x - y = 18 b) x + 18 = -y 0.1x – 0.25y = 3.60 c) x - 18 = y 0.1x – 3.60 = 0.25y d) x + y = 18 0.1x - 3.60 = -0.25y
3. ( )	José pagó $104.00 por dos libros, uno de física y otro de matemáticas. Si el libro de matemáticas costó $24.00 más que el de física, ¿cuál es el sistema de ecuaciones que representa al problema? a) x + y = 24 x - y = 104 b) x + 24 = y x + 104 = y c) x = y + 24 x + y = 104 d) x = 24 + y x + 104 = y

4. (   ) Analiza el siguiente sistema de ecuaciones:

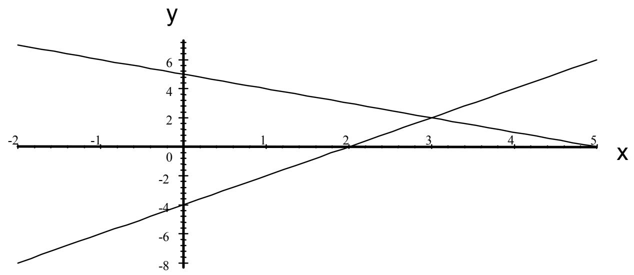
$$x + y = 5$$
$$2x - y = 4$$

¿Cuál es la representación gráfica que le corresponde?

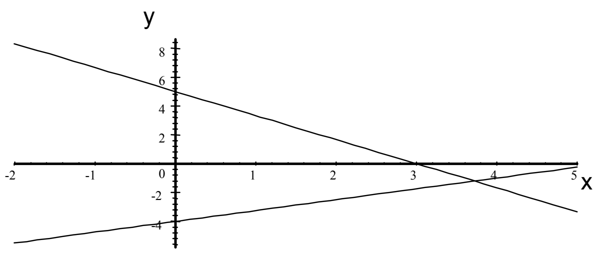
a)



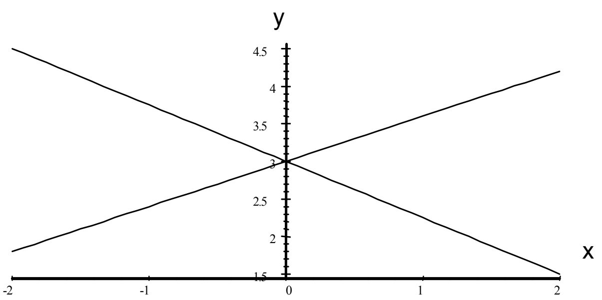
b)



c)



d)

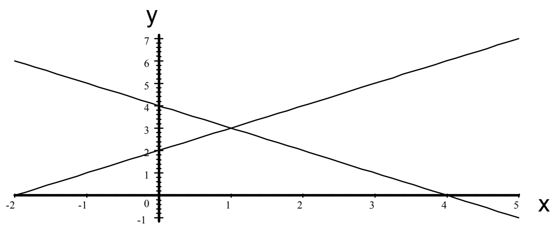


5. ( ) Analiza el siguiente sistema de ecuaciones:

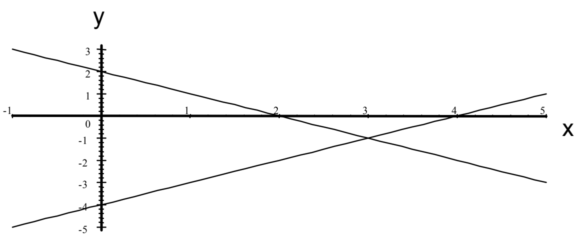
$$x - y = 2$$
$$2x + 3y = 9$$

La representación gráfica que le corresponde es:

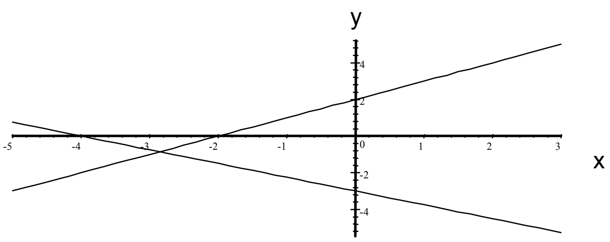
a)



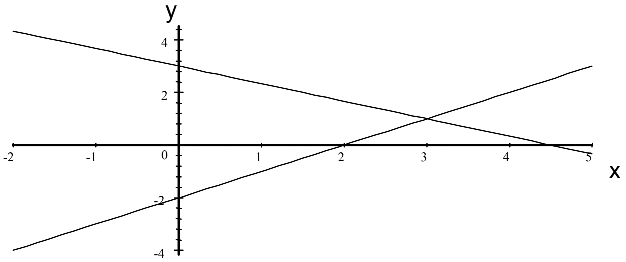
b)



c)



d)

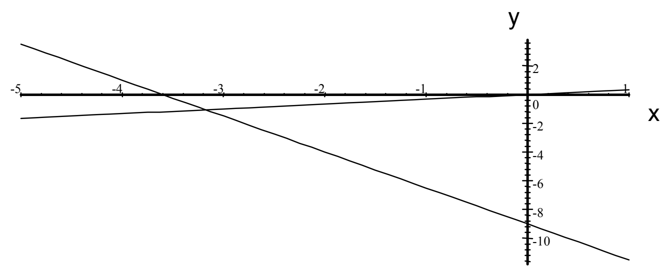


6. (   ) Analiza el siguiente sistema de ecuaciones:

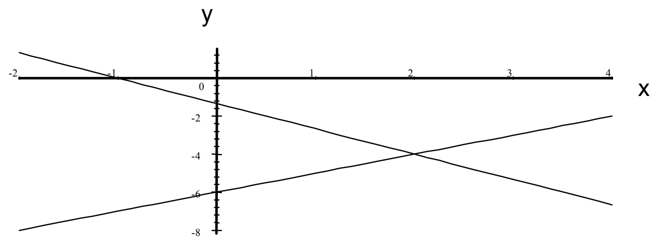
$$x - 3y = 0$$
$$5x + 2y = -18$$

¿Cuál es su representación gráfica?

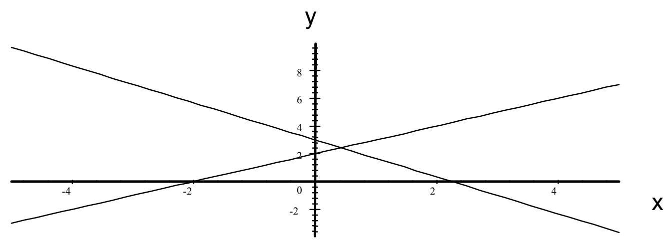
a)



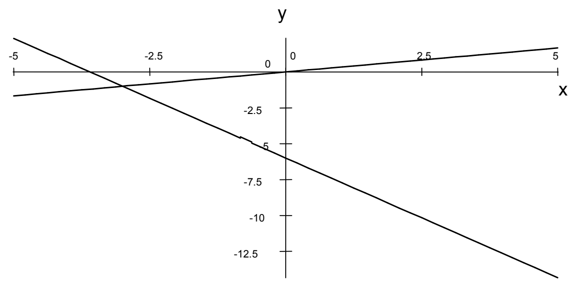
b)



c)



d)



7. ( )	Aplica el método de igualación al siguiente sistema de ecuaciones. $x + 3y = 6$ $5x - 2y = 13$ ¿Cuál es la opción que corresponde a la solución? a) $x = 5; y = -2$ b) $x = 4; y = 1$ c) $x = 3; y = 1$ d) $x = 2; y = -3$
8. ( )	Aplica el método de igualación al siguiente sistema de ecuaciones. $x – 5y = 8$ $-7x + 8y = 25$ ¿Cuál es la opción que corresponde a la solución? a) $x = -7; y = -3$ b) $x = -5; y = 2$ c) $x = -4; y = 3$ d) $x = -3; y = 1$
9. ( )	Aplica el método de igualación al siguiente sistema de ecuaciones. $5x + 6y = 40$ $4x - 3y = -7$ ¿Cuál es la opción que corresponde a la solución? a) $x = -5; y = 2$ b) $x = 2; y = 5$ c) $x = 3; y = -1$ d) $x = 4; y = -3$
10. ( )	Aplica el método de suma y resta al siguiente sistema de ecuaciones. $6x - 5y = -9$ $4x + 3y = 13$ ¿Cuál es la solución que le corresponde? a) $x = 1 ; y = 3$ b) $x = 2 ; y = 3$ c) $x = 4 ; y = 1$ d) $x = 5 ; y = -2$

11. ( )	Aplica el método de suma y resta al siguiente sistema de ecuaciones. $7x - 15y = 1$ $-x - 6y = 8$ ¿Cuál es la solución que le corresponde? a) $x = -3$; $y=2$ b) $x = -2$; $y = -1$ c) $x = -1$; $y = 2$ d) $x = -1$; $y = 4$
12. ( )	Aplica el método de suma y resta al siguiente sistema de ecuaciones. $10x - 3y = 36$ $2x + 5y = -4$ ¿Cuál es la solución que le corresponde? a) $x = -3$; $y = 1$ b) $x = -1$; $y = 4$ c) $x = 2$; $y = -1$ d) $x = 3$; $y = -2$
13. ( )	Aplica el método de sustitución al siguiente sistema de ecuaciones. $8x - 5 = 7y – 9$ $6x = 3y + 6$ ¿Cuál es la solución que le corresponde? a) $x = 3$; $y = 4$ b) $x = 2$; $y = -1$ c) $x = -2$; $y = 4$ d) $x = -5$; $y = 3$
14. ( )	Aplica el método de sustitución al siguiente sistema de ecuaciones. $6x +3y = 6$ $-5y = 2x – 6$. La solución que le corresponde es: a) $x = 2$; $y = 1/3$ b) $x = 2$; $y = 1/5$ c) $x = 1/2$; $y = 1$ d) $x = -1/4$; $y = 3$

15. ( )	Aplica el método de sustitución al siguiente sistema de ecuaciones. $4x = 5 - 5y$ $-10y - 4x = -7$ La solución que le corresponde es: a) $x = -2/3$; $y = 1/6$ b) $x = 3/7$; $y = ¼$ c) $x = 3/4$; $y = 2/5$ d) $x = 3/2$; $y = - 1/5$
16. ( )	Aplica el método de determinantes al siguiente sistema de ecuaciones. $3x - 2y = -2$ $5x + 8y = -60$ La solución que se obtiene es: a) $x = 2$; $y = -3$ b) $x = -1$; $y = 4$ c) $x = -3$; $y = 1$ d) $x = -4$; $y = -5$
17. ( )	Aplica el método de determinantes al siguiente sistema de ecuaciones. $2x - y = -4$ $3x + 5y = 7$ La solución que se obtiene es: a) $x = -1$; $y = 2$ b) $x = 2$; $y = -3$ c) $x = 3$; $y = 1$ d) $x = 4$; $y = -1$
18. ( )	Aplica el método de determinantes al siguiente sistema de ecuaciones. $7x - 5y = -17$ $2x - y = -1$ La solución que se obtiene es: a) $x = 7$; $y = 3$ b) $x = 5$; $y = 8$ c) $x = 4$; $y = 9$ d) $x = 1$; $y = 6$

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes problemas, encuentra el sistema de ecuaciones (modelo matemático) y resuélvelo utilizando cualquier método algebraico, anotando en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la solución de cada problema.

19. ( )	"La diferencia de dos números es 40 y 1/8 de su suma es 11". Los números correspondientes son: a) x = 64; y = 24 b) x = 64; y = -24 c) x = 24; y = -16 d) x = 16; y = -24
20. ( )	Cinco litros de etanol y 3 kilos de cloruro de sodio costaron $228.00 y tres litros de etanol y dos kilos de cloruro de sodio costaron $138.00 (a los mismos precios). ¿ Cuál es el precio de un litro de etanol y un kilo de cloruro de sodio? a) Litro de etanol: $42.00; kilo de cloruro de sodio: $6.00 b) Litro de etanol: $39.00; kilo de cloruro de sodio: $9.00 c) Litro de etanol: $38.00; kilo de cloruro de sodio: $7.00 d) Litro de etanol: $30.00; kilo de cloruro de sodio: $8.00
21. ( )	Dos trajes y cuatro camisas costaron $3,960.00 y tres trajes y cinco camisas costaron $5,590.00 (a los mismos precios). ¿Cuál es el precio de un traje y el precio de una camisa?. a) Traje $1,230.00; camisa $400.00 b) Traje $1,280.00; camisa $350.00 c) Traje $1,330.00; camisa $300.00 d) Traje $1,380.00; camisa $250.00
22. ( )	Sí aplicamos el método de determinantes al siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. $x+3y-z=1$ $x-y+2z=-4$ $2x+y+3z=2$ La solución que se obtiene es: a) $x=9, \quad y=-5, \quad z=5$ b) $x=5, \quad y=5, \quad z=9$ c) $x=-5, \quad y=9, \quad z=-5$ d) $x=-9, \quad y=5, \quad z=5$

23. ( )	Aplica el método de determinantes al siguiente sistema de ecuaciones. $2x-3y+z=5$ $-x+y+2z=7$ $x-4y-3z=-14$ La solución que se obtiene es: a) $x=-4,\quad y=1,\quad z=-2$ b) $x=-1,\quad y=4,\quad z=2$ c) $x=2,\quad y=1,\quad z=4$ d) $x=4,\quad y=-2,\quad z=1$
24. ( )	Encuentra la solución al siguiente problema. *“Laura fue a la papelería y compró 5 lápices, 3 plumas y 2 cuadernos pagando $66.00. José compró 2 lápices 4 plumas y un cuaderno pagando $49.00 y Fernanda compró un cuaderno, un lápiz y una pluma pagando $25.00 (a los mismos precios), ¿cuál es el precio de cada artículo?* a) Lápiz: $5.00 Pluma: $7.00 Cuaderno: $14.00 b) Lápiz: $2.00 Pluma: $5.00 Cuaderno: $18.00 c) Lápiz: $3.00 Pluma: $7.00 Cuaderno: $15.00 d) Lápiz: $4.00 Pluma: $6.00 Cuaderno: $12.00

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	a
2	d
3	c
4	b
5	d
6	a
7	c
8	a
9	b
10	a
11	b
12	d
13	a
14	c
15	c
16	d
17	a
18	c
19	a
20	a
21	b
22	d
23	c
24	c

Sugerencias

- Si te equivocaste en los reactivos 1, 2, 3, 19, 20 ó 21, consulta el libro de Aurelio Baldor, Álgebra Elemental. p.p. 356-364.
- Si te equivocaste en los reactivos 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ó 18, consulta el libro de Carlos Bosch y Claudia Gómez W. Álgebra. p.p. 236-246.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Cuentas con una hora treinta minutos para resolver dichos ejercicios.

A continuación se te presentan una serie de ejercicios, con la finalidad de que ejercites tus conocimientos y habilidades en la solución de problemas.

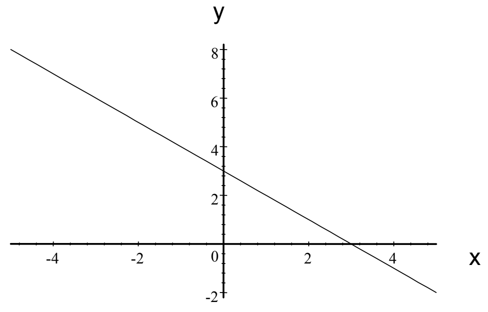
INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos, desarrolla tus operaciones en hojas aparte y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. ( )	"La edad de Adriana es el triple que la edad de Mónica y ambas edades suman 28 años". El modelo algebraico que representa al problema es: a) 3x − y = 28 b) 3x + x = 28 c) x + 3y = 28 d) x − 3x = 28
2. ( )	"Tres números enteros consecutivos suman 48". El modelo algebraico que representa al problema es: a) 3a + 3 = 48 b) 3a − 1 = 48 c) 3a + 1 = 48 d) 3a − 3 = 48
3. ( )	En la ecuación $10x-90-45+54x=8x-2+5+10x$, el valor de "x" es: a) x = 5 b) x = 3 c) x = 2 d) x = 1

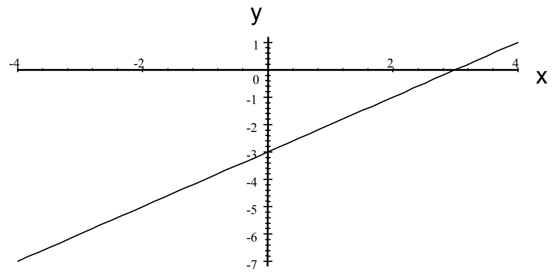
4. ( )	Al resolver la ecuación $10x + 12 = 20x + 10$, el valor de "x" es: a) x = 4/7 b) x = 3/10 c) x = 2/9 d) x = 1/5
5. ( )	Al resolver la ecuación $30x - (-x + 6) + (-5x + 4) = -(5x + 6) + (-8 + 3x)$, el valor de "x" es: a) x = −3/7 b) x = −2/9 c) x = 1/3 d) x = 2/5

6. ( )	La gráfica que corresponde a la ecuación y = 3x − 3, es:

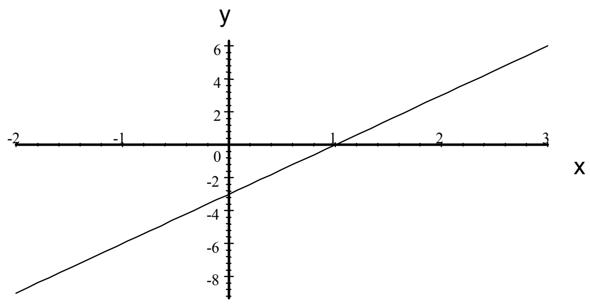
a)



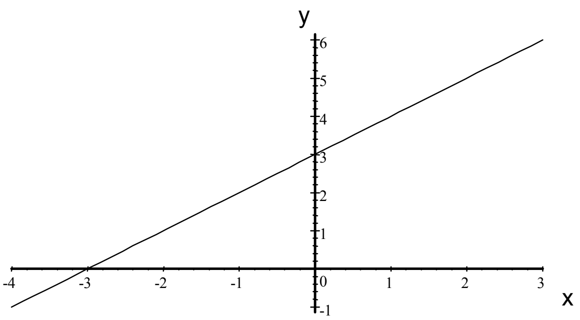
b)



c)



d)



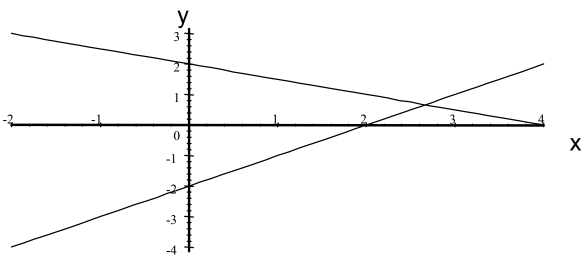
7. ( )	"La diferencia de dos números es 14 y la cuarta parte de su suma es 13". El sistema de ecuaciones que representa el problema es: a) $x - y = 14$ $\frac{1}{4}(x+y)=13$ b) $x + y = -14$ $x - y = \frac{13}{4}$ c) $\frac{1}{4}(x-y) = 14$ $x + y = 13$ d) $\frac{1}{4}(x+y)=14$ $x - y = 13$
8. ( )	Yadira pagó $165.00 por dos libros, uno de Cálculo y otro de Economía. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa el problema, si se considera que el libro de Cálculo costó $15.00 más que el de Economía? a) $x - 15 = 165$ $x + y = 15$ b) $x - 165 = -y$ $x + 15 = y$ c) $x - y = 165$ $y = 15 - x$ d) $x = y + 165$ $x + 15 = y$

9. (   ) Analiza el siguiente sistema de ecuaciones

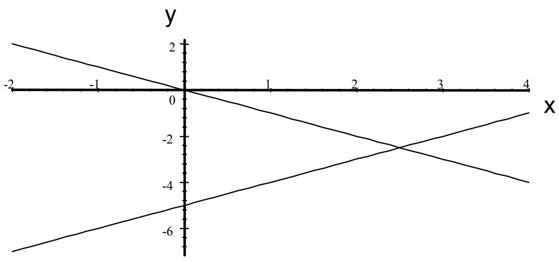
$-2x + y = -4$
$x + y = 5$

La representación gráfica que le corresponde es:

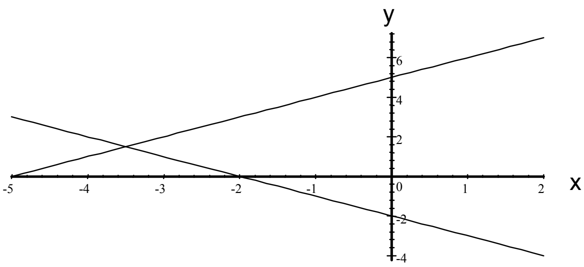
a)



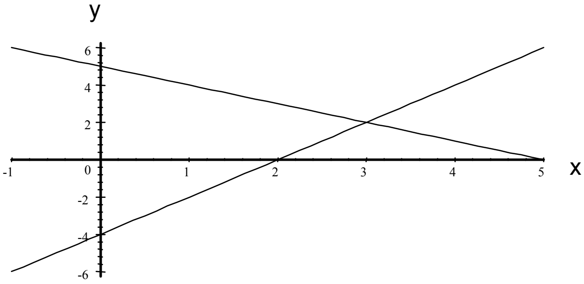
b)



c)



d)



10. ( )	Aplica el método de igualación al siguiente sistema de ecuaciones. $x - y = 1$ $x + y = 7$ La solución que se obtiene es: a) $x = 9;\ y = 2$ b) $x = 6;\ y = -5$ c) $x = 5;\ y = 2$ d) $x = 4;\ y = 3$
11. ( )	Aplica el método de determinantes al siguiente sistema de ecuaciones. $x - 2y = 10$ $2x + 3y = -8$ ¿Cuál es la solución que se obtiene? a) $x = 8;\ y = 1$ b) $x = 3;\ y = -2$ c) $x = 2;\ y = -4$ d) $x = -5;\ y = 3$
12. ( )	Aplica el método de determinantes al siguiente sistema de ecuaciones. $3x + 4y = 15$ $2x + y = 5$ La solución que le corresponde es: a) $x = -2;\ y = 1$ b) $x = 1;\ y = 3$ c) $x = 2;\ y = 5$ d) $x = 3;\ y = -2$

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, aplicando cualquier método algebraico y anota en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

13. ( )	"Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4". Dichos números son: a) $x = 96$; $y = 84$ b) $x = 82$; $y = 94$ c) $x = 80$; $y = 98$ d) $x = 75$; $y = 80$
14. ( )	Martha tiene \$660.00 en 75 monedas de \$5.00 y \$10.00. ¿Cuántas monedas tiene de \$5.00 y \$10.00. a) x = 20 monedas de \$5.00 y = 45 monedas de \$10.00 b) x = 18 monedas de \$5.00 y = 57 monedas de \$10.00 c) x = 15 monedas de \$5.00 y = 60 monedas de \$10.00 d) x = 12 monedas de \$5.00 y = 63 monedas de \$10.00
15. ( )	La señora Juana compró 2 kilos de azúcar, 1 kilo de café y 3 litros de leche pagando por ello \$81.00. La señora Andrea compró un kilo de azúcar, dos kilos de café y 2 litros de leche pagando \$84.00 y la señora Guillermina compró 4 kilos de azúcar, un kilo de café y 2 litros de leche pagando \$89.00 (a los mismos precios). ¿Cuál es el precio de cada artículo? a) Azúcar: \$12.00 Café: \$27.00 Leche: \$10.00 b) Azúcar: \$ 8.00 Café: \$30.00 Leche: \$11.00 c) Azúcar: \$10.00 Café: \$25.00 Leche: \$12.00 d) Azúcar: \$ 9.00 Café: \$23.00 Leche: \$ 9.00

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de reactivo	Respuesta correcta
1	b
2	a
3	b
4	d
5	a
6	c
7	a
8	b
9	d
10	d
11	c
12	b
13	a
14	b
15	c

BIBLIOGRAFÍA

- Ortíz Campos, Francisco José. ***MATEMÁTICAS I ÁLGEBRA***. Publicaciones Cultural, México 1996.

- Baldor, Aurelio. ***ÁLGEBRA ELEMENTAL***. Publicaciones Cultural, México 1994.

- Allen R., Angel. ***ÁLGEBRA ELEMENTAL***. Prentice Hall Hispanoamericana, México 1994, 3a. edición.

- Bosch, Carlos., Gómez W., Claudia. ***ÁLGEBRA***. Santillana, México 1998.

SUGERENCIAS PARA PRESENTAR EXÁMENES DE RECUPERACIÓN O ACREDITACIÓN ESPECIAL

Para evitar cualquier contratiempo al presentar el examen de recuperación o acreditación especial debes considerar las siguientes recomendaciones:

Organización:

- Preséntate al menos con 10 minutos de anticipación al salón indicado. Debes presentarle al profesor aplicador, esta guía resuelta.
- Lleva el comprobante de inscripción al examen y tu credencial actualizada.
- Lleva dos lápices del No. 2 o 2 ½.
- No olvides una goma que no manche.

Durante el examen:

- Lee con atención tanto las instrucciones como las preguntas y si tienes alguna duda consúltala con el aplicador.
- Contesta primero las preguntas que te parezcan “fáciles” y después concentra toda tu atención en las “difíciles”.
- Si te solicitan explicar o desarrollar algún tema, identifica las ideas principales que quieras exponer y escríbelas de la manera más concreta y clara que puedas, evita el planteamiento de ideas innecesarias.
- Escribe tus respuestas con letra clara, legible y sin faltas de ortografía.
- Al terminar de contestar el examen, revísalo nuevamente para asegurarte que todas las preguntas estén contestadas.
- Centra tu atención en el examen, no trates de copiar, recuerda que el compañero de junto puede estar equivocado.

La Guía para presentar exámenes de
Recuperación o Acreditación Especial
Matemáticas I
se terminó de reimprimir en el mes de octubre de 2006
en los talleres de la Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V.
Calz. San Lorenzo Tezonco núm. 244, Col. Paraje San Juan
Delegación Iztapalapa, C.P. 09830

El tiraje fue de 1 550 ejemplares
más sobrantes para reposición