



“Un proceso pertinente de  
formación para la vida”

# **COLEGIO DE BACHILLERES**

## **Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92)**

### **MATEMÁTICAS IV**

Guía para presentar exámenes de  
Recuperación o Acreditación Especial

**Matemáticas IV**  
(Versión preliminar)

Esta guía fue elaborada por la **Secretaría Académica**, a través de la **Dirección de Planeación Académica**.

**Colaboradora**

Profra. Reyna Cruz Gómez

Colegio de Bachilleres, México  
[www.cbachilleres.edu.mx](http://www.cbachilleres.edu.mx)  
Rancho Vista Hermosa No. 105  
Ex-Hacienda Coapa,  
04920, México, D.F.

La presente obra fue editada en el procesador de palabras Word 2002 (Office xp).

Word 2002 es marca registrada de Microsoft Corp.

Este material se utiliza en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Colegio de Bachilleres, institución pública de educación media superior del Sistema Educativo Nacional.

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de la cubierta, puede reproducirse, almacenarse o transmitirse en forma alguna, ni tampoco por medio alguno, sea éste eléctrico, electrónico, químico, mecánico, óptico, de grabación o de fotocopia, sin la previa autorización escrita por parte del Colegio de Bachilleres, México.

ENERO 2003

## ÍNDICE

<b>PRESENTACIÓN</b> .....	IV
<b>PRÓLOGO</b> .....	V
<b>UNIDAD 1. La relación entre función lineal, lugar geométrico y sistemas de referencia</b> .....	1
<b>1.1 El lugar geométrico en diferentes sistemas de referencia</b> .....	3
Aplicación del conocimiento .....	6
Ejercicios. ....	13
Tabla de Comprobación .....	23
<b>1.2 Función lineal como lugar geométrico en diferentes sistemas de referencia</b> .....	29
Aplicación del conocimiento .....	32
Ejercicios. ....	39
Tabla de Comprobación .....	52
<b>1.3 Aplicación de las funciones lineales</b> .....	60
Aplicación del conocimiento .....	62
Ejercicios. ....	67
Tabla de Comprobación .....	70
<b>Ejercicios de autoevaluación</b> .....	72
<b>Clave de respuesta</b> .....	82
<b>UNIDAD 2. Cónicas: un caso general</b> .....	87
<b>2.1 Explorando las cónicas</b> .....	89
Aplicación del conocimiento .....	92
Ejercicios. ....	94
Tabla de Comprobación .....	96
<b>2.2 Modelos algebraicos de la circunferencia y la parábola</b> .....	97
Aplicación del conocimiento .....	101
Ejercicios. ....	108
Tabla de Comprobación .....	118
<b>2.3 El modelo general de las cónicas: sus características</b> .....	123
Aplicación del conocimiento .....	129
Ejercicios. ....	135
Tabla de Comprobación .....	148
<b>2.4 Aplicaciones de las cónicas</b> .....	153
Aplicación del conocimiento .....	154
Ejercicios. ....	159
Tabla de Comprobación .....	162
<b>Ejercicios de autoevaluación</b> .....	163
<b>Clave de respuesta</b> .....	170
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	175
<b>SUGERENCIAS PARA PRESENTAR EXÁMENES DE RECUPERACIÓN O ACREDITACIÓN ESPECIAL</b> .....	176

## PRESENTACIÓN

La evaluación de recuperación y la de acreditación especial son oportunidades extraordinarias que debes aprovechar para aprobar las asignaturas que, por diversas razones, reprobaste en el curso normal; pero ¡cuidado!, presentarte a un examen sin la preparación suficiente significa un fracaso seguro, es una pérdida de tiempo y un acto irresponsable que puedes evitar.

¿Cómo aumentar tu probabilidad de éxito en el examen mediante la utilización de esta guía? La respuesta es simple, observa las siguientes reglas:

- Convéncete de que tienes la capacidad necesaria para acreditar la asignatura. Recuerda que fuiste capaz de ingresar al Colegio de Bachilleres mediante un examen de selección.
- Sigue al *pie de la letra* las instrucciones de la guía.
- Procura dedicarte al estudio de este material, *al menos durante 15 días, tres horas diarias continuas*.
- Contesta toda la guía: es un requisito que la presentes resuelta y en limpio al profesor aplicador antes del examen correspondiente.

## PRÓLOGO

En el marco del programa de desarrollo institucional 2001 y 2006, el estudiante adquiere una especial relevancia, por lo que el Colegio de Bachilleres metropolitano se ha avocado a la elaboración de diversos materiales didácticos que apoyen al estudiante en diversos momentos del proceso de enseñanza aprendizaje.

Uno de los materiales elaborados son las guías de estudio, las cuales tienen como propósito apoyar a los estudiantes que deben presentar exámenes de recuperación o acreditación especial favoreciendo sus probabilidades de éxito.

En este contexto, la guía para presentar exámenes de recuperación y acreditación especial de Matemáticas IV se ha elaborado con el propósito de que los estudiantes que se encuentran en situación académica irregular y que tienen necesidad de presentar exámenes en periodos extraordinarios para acreditar la asignatura cuenten con este material para llevar a cabo su preparación y, así, contar con más elementos para incrementar sus posibilidades de éxito.

Esta guía aborda en forma integral y sintética las principales temáticas establecidas en el programa de estudio; las actividades y ejercicios que se plantean son un apoyo para que el estudiante recupere los conocimientos previos, los relacione con otros más complejos y, en su caso, los aplique en el desarrollo de procedimientos y modelos matemáticos propios del cálculo. Esto permitirá que, con el estudio de la guía, continúe desarrollando y ejercitando sus habilidades de análisis y razonamiento matemático. Al final del desarrollo de las unidades la guía contiene una autoevaluación sobre los elementos esenciales de toda la unidad, para que el alumno verifique su grado de comprensión y dominio. Asimismo se incluyen algunas sugerencias para reforzar el apoyo sobre los aspectos estratégicos del tema.

En la primera unidad, **LA RELACIÓN ENTRE FUNCIÓN LINEAL, LUGAR GEOMÉTRICO Y SISTEMAS DE REFERENCIA**, se aborda de manera gráfica y algebraica el concepto de *lugar geométrico* en los sistemas de referencia rectangular y polar. También se revisa el caso de la función lineal como lugar geométrico, así como las diferentes formas de representación algebraica y gráfica de esta función, incluyendo su construcción en el sistema polar; posteriormente se estudian diferentes casos de aplicación de las funciones lineales hasta llegar a las desigualdades. Finalmente se presentan una serie de problemas en los cuales se aplican y verifican los procedimientos y modelos matemáticos estudiados a lo largo de la unidad.

En la segunda unidad, **CÓNICAS: UN CASO GENERAL**, se estudia el origen, los elementos y los modelos algebraicos de las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola), así como su representación gráfica. Se inicia con los casos particulares de cada cónica y se llega al modelo general: una ecuación de segundo grado con dos incógnitas, para estudiar sus características y ciertas reglas y técnicas para identificar el tipo de cónica involucrada. Al igual que en la primera unidad se presentan diversos problemas en los que se ven algunas aplicaciones de las diferentes cónicas.

Por último se proporciona una bibliografía básica en la que se pueden consultar los temas desarrollados en la guía.

En síntesis, la guía para presentar exámenes de recuperación y acreditación especial constituye un material didáctico producto del esfuerzo académico orientado a fortalecer los niveles de aprovechamiento y acreditación de los estudiantes.



# **UNIDAD 1**

**LA RELACIÓN ENTRE FUNCIÓN LINEAL,  
LUGAR GEOMÉTRICO Y  
SISTEMAS DE REFERENCIA**





### 1.1 El lugar geométrico en diferentes sistemas de referencia

#### Aprendizajes

- Aplicar las condiciones que generan un lugar geométrico.
- Representar geoméricamente un lugar geométrico.
- Calcular la distancia entre dos puntos.
- Aplicar el concepto de distancia entre dos puntos en la solución de problemas.
- Calcular la división de un segmento en una razón dada.
- Transformar las coordenadas de un punto del sistema rectangular al sistema polar.
- Transformar las coordenadas de un punto del sistema polar al sistema rectangular.

**Lugar geométrico** se define como el **conjunto de puntos que satisfacen, al menos, una condición común a todos ellos**. Éste se puede representar gráficamente en un plano, el cual puede ser el sistema cartesiano o el sistema polar.

El **sistema cartesiano** consta de dos rectas perpendiculares entre sí. La recta horizontal se denomina eje  $x$  o eje de las abscisas, encontrándose a la izquierda los números negativos y a la derecha los números positivos. La recta vertical representa al eje de las  $y$  o eje de las ordenadas, siendo hacia arriba los números positivos y hacia abajo los números negativos. Las **coordenadas rectangulares** se representan como  $(x, y)$ .

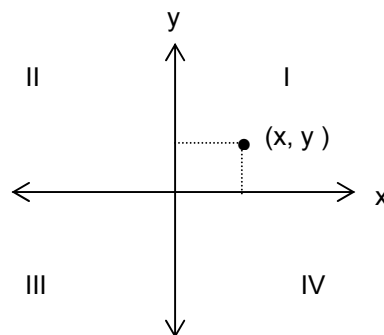


Figura 1

El **sistema polar** es de mucha utilidad para representar algunas curvas, **las coordenadas polares se representan como  $(r, \theta)$** , el primer número representa la distancia del origen al punto donde  $r$  recibe el nombre de radio vector y el segundo representa el ángulo de inclinación, al cual se le llama ángulo polar o ángulo vectorial.

Las coordenadas polares se localizan señalando un punto que se denomina origen y a partir de él se señala un segmento horizontal llamado eje polar; posteriormente se traza el ángulo requerido y se mide la distancia que marca la coordenada.

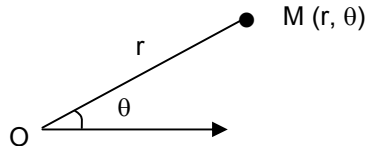


Figura 2

Para representar un lugar geométrico en cualquier sistema de referencia se requiere de su ecuación y, posteriormente, se realiza una tabulación para encontrar los pares coordenados y así poder realizar la gráfica correspondiente.

Para determinar la **distancia entre dos puntos** sean  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  los cuales se encuentran en un plano, como lo muestra la siguiente figura.

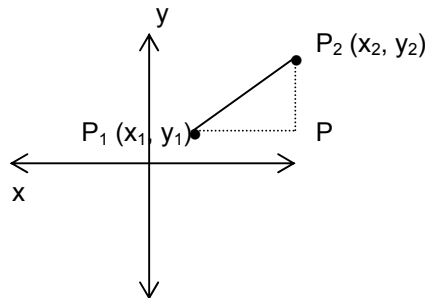


Figura 3

Se forma un triángulo rectángulo en el cual la hipotenusa es la distancia requerida y los catetos se calculan obteniendo la diferencia entre los valores de las abscisas y las ordenadas de los puntos.

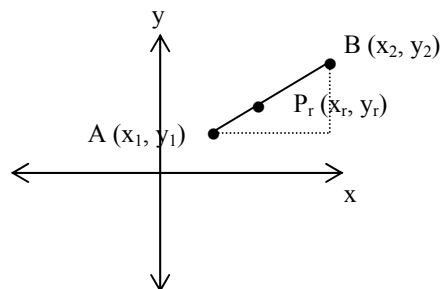
$$\overline{PP_1} = x_2 - x_1$$

$$\overline{PP_2} = y_2 - y_1$$

Con base en el teorema de Pitágoras se determina la fórmula de la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si una recta se divide en una razón dada ( $r$ ), sus proyecciones en los ejes cartesianos están divididas en la misma razón. Al establecer un punto sobre una recta este punto la divide en una razón  $r$ .



Donde:

$$r = \frac{AP_r}{P_rB}$$

Figura 4

De la figura 4 podemos establecer la fórmula para encontrar el punto que divide la recta en una razón dada.

$$x_r = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y_r = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

Un caso especial es cuando la razón es igual a 1, la cual divide a la recta en dos partes iguales y se denomina **punto medio**, cuyas fórmulas son las siguientes:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Cualquier punto en el sistema rectangular se puede representar en el sistema polar y viceversa, utilizando las fórmulas para transformar las coordenadas de un sistema a otro.

De rectangulares a polares	De polares a rectangulares
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \text{arc tan } \frac{y}{x}$	$x = r \cos \theta$ $y = r \text{ sen } \theta$
Donde: $r =$ radio vector $\theta =$ ángulo polar o ángulo vectorial	

Para el cálculo del ángulo en la transformación de coordenadas rectangulares a polares, es necesario considerar el cuadrante en el cual se encuentra para aplicar las siguientes reglas:

- Si el punto se encuentra en el primer cuadrante, el resultado es directo.**
- Si el punto se encuentra en el segundo o tercer cuadrante al valor del ángulo se suma  $180^\circ$ .**
- Si el punto se encuentra en el cuarto cuadrante al valor del ángulo se suma  $360^\circ$ .**

Por ejemplo, si la coordenada a convertir es  $(-4, 5)$ , al calcular el ángulo tenemos:

$$\theta = \text{arc tan } \frac{y}{x} = \text{arc tan } \frac{5}{-4} = -51.34^\circ$$

Como el punto se encuentra en el segundo cuadrante se suma  $180^\circ$  al resultado anterior.

$$\theta = -51.34^\circ + 180^\circ = 128.66^\circ, \text{ que es el resultado final.}$$

**APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO**

Observa con cuidado cómo se traza la gráfica de la función  $r = 1 + \cos \theta$ .

Paso 1

Por medio de una tabulación calcula el valor de  $r$ , asignándole valores a  $\theta$ , tales como:

$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ$  y  $360^\circ$

Paso 2

Se sustituyen en la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 0^\circ \\ r &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 30^\circ \\ r &= 1 + 0.87 = 1.87 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 45^\circ \\ r &= 1 + 0.71 = 1.71 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 60^\circ \\ r &= 1 + 0.5 = 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 90^\circ \\ r &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 120^\circ \\ r &= 1 - 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 135^\circ \\ r &= 1 - 0.71 = 0.29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 150^\circ \\ r &= 1 - 0.87 = 0.13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 180^\circ \\ r &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 210^\circ \\ r &= 1 - 0.87 = 0.13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 225^\circ \\ r &= 1 - 0.71 = 0.29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 240^\circ \\ r &= 1 - 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 270^\circ \\ r &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 300^\circ \\ r &= 1 + 0.5 = 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 315^\circ \\ r &= 1 + 0.71 = 1.71 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 330^\circ \\ r &= 1 + 0.87 = 1.87 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos 360^\circ \\ r &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

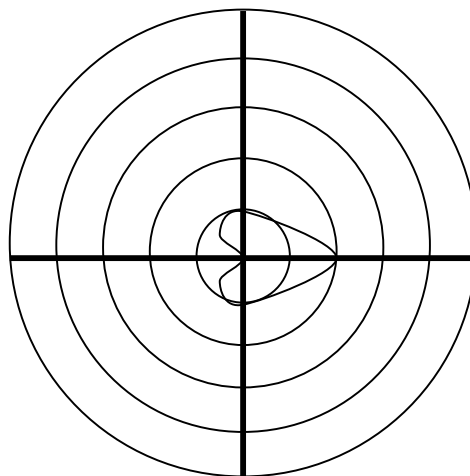
## Paso 3

Con los valores obtenidos se realiza la tabulación.

$r$	$\theta$	$(r, \theta)$
2	$0^\circ$	$(2, 0^\circ)$
1.87	$30^\circ$	$(1.87, 30^\circ)$
1.71	$45^\circ$	$(1.71, 45^\circ)$
1.5	$60^\circ$	$(1.5, 60^\circ)$
1	$90^\circ$	$(1, 90^\circ)$
0.5	$120^\circ$	$(0.5, 120^\circ)$
0.29	$135^\circ$	$(0.29, 135^\circ)$
0.13	$150^\circ$	$(0.13, 150^\circ)$
0	$180^\circ$	$(0, 180^\circ)$
0.13	$210^\circ$	$(0.13, 210^\circ)$
0.29	$225^\circ$	$(0.29, 225^\circ)$
0.5	$240^\circ$	$(0.5, 240^\circ)$
1	$270^\circ$	$(1, 270^\circ)$
1.5	$300^\circ$	$(1.5, 300^\circ)$
1.71	$315^\circ$	$(1.71, 315^\circ)$
1.87	$330^\circ$	$(1.87, 330^\circ)$
2	$360^\circ$	$(2, 360^\circ)$

## Paso 4

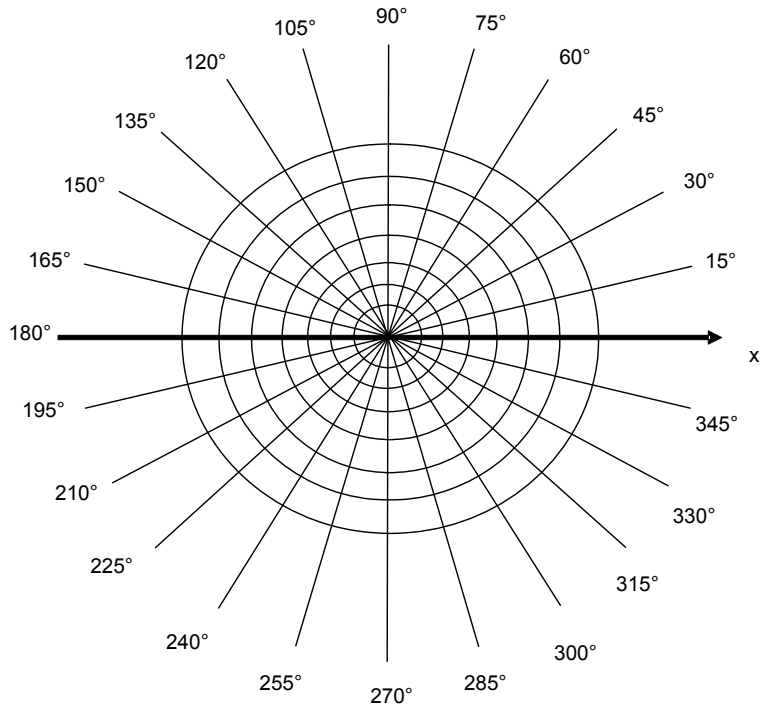
Se grafican los valores anteriores. Se marca el ángulo  $\theta$  y posteriormente la distancia  $r$ . De esta forma se señalan todos los puntos y se traza la gráfica.



Ejercita tus conocimientos realizando la siguiente grafica:  $r = \text{sen} (2 \theta)$ .

Para realizar la tabulación primero se multiplica el valor del ángulo por 2 y posteriormente se obtiene el valor de seno.

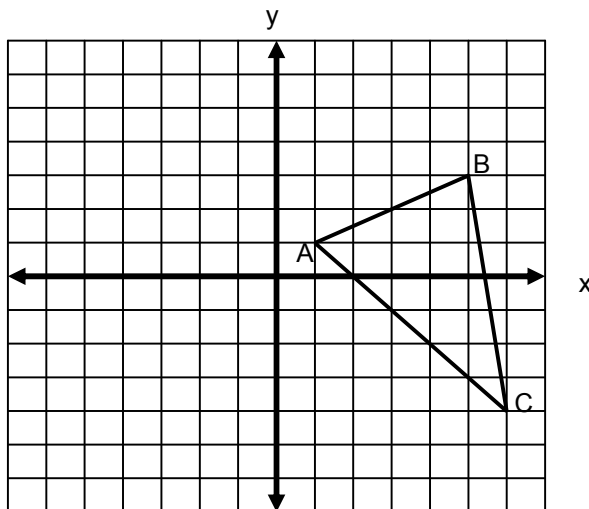
$r$	$\theta$	$(r, \theta)$
	$0^\circ$	
	$30^\circ$	
	$45^\circ$	
	$60^\circ$	
	$90^\circ$	
	$120^\circ$	
	$135^\circ$	
	$150^\circ$	
	$180^\circ$	



Ahora desarrollaremos un ejercicio en el que se calcula el perímetro y área del triángulo cuyos vértices son los puntos A (1, 1), B (5, 3) y C (6, -4).

Paso 1

Se localizan los puntos en el plano cartesiano y se traza la gráfica.



## Paso 2

Se calculan las distancias de los puntos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{CA}$ .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancia de  $\overline{AB}$ :

$$d = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 4.5$$

Distancia de  $\overline{BC}$ :

$$d = \sqrt{(6-5)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 7.1$$

Distancia de  $\overline{CA}$ :

$$d = \sqrt{(1-6)^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{(-5)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.1$$

## Paso 3

Para calcular el perímetro se suman los valores de las distancias.

$$P = 4.5 + 7.1 + 7.1 = 18.7 u$$

## Paso 4

Para calcular el área se calcula el punto medio del lado  $\overline{AB}$ .

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Se calcula la distancia del punto medio al punto C.

$$d = \sqrt{(6-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 6.7$$

Con la fórmula  $A = \frac{(b)(h)}{2}$  se calcula el área.

$$A = \frac{(4.5)(6.7)}{2} = \frac{30.15}{2} = 15.07 u^2$$

Con base en el ejercicio anterior, calcula las coordenadas del punto que divide el lado  $\overline{CA}$  en una razón

$$r = \frac{2}{5}.$$

En las fórmulas de razón se sustituyen los valores de las coordenadas A (1, 1) y C (6, -4) para calcular el punto P<sub>r</sub>.

$$x_r = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)(6)}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{1 + \frac{12}{5}}{\frac{5+2}{5}} = \frac{\frac{5+12}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{\frac{17}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{17}{7}$$

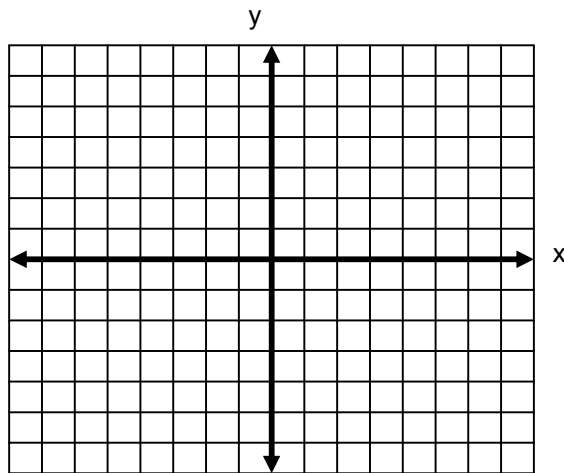
$$y_r = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)(-4)}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{1 - \frac{8}{5}}{\frac{5+2}{5}} = \frac{\frac{5-8}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{7}{5}} = -\frac{3}{7}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto que divide el lado  $\overline{CA}$  en una razón

$$r = \frac{2}{5} \text{ son: } \left(\frac{17}{7}, -\frac{3}{7}\right)$$

Ejercita tus conocimientos.

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A (6, 7), B (-8, -1) y C (-2, -7).



Con base en el ejercicio anterior encuentra el punto que divide el lado  $\overline{BC}$  en una razón  $r = \frac{3}{4}$ .



A continuación se presenta un ejercicio donde se transformará la coordenada  $(-6, -2)$  al sistema polar.

Paso 1

Se calculan los valores de  $r$  y  $\theta$ .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 6.3$$

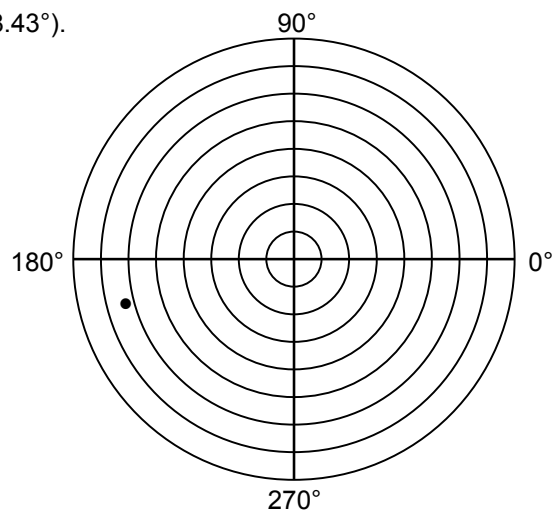
$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{-2}{-6} = 18.43^\circ$$

Como se encuentra en el tercer cuadrante a este resultado se suma  $180^\circ$ .

$$\theta = 18.43^\circ + 180^\circ = 198.43^\circ$$

Paso 2

Se grafica la coordenada  $(6.3, 198.43^\circ)$ .



Ahora transformaremos la coordenada  $(4, 155^\circ)$  al sistema rectangular.

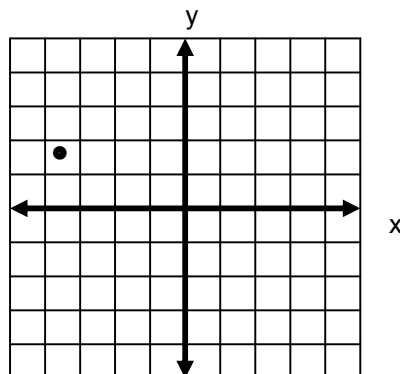
Paso 1

Se calculan los valores de "x" y "y".

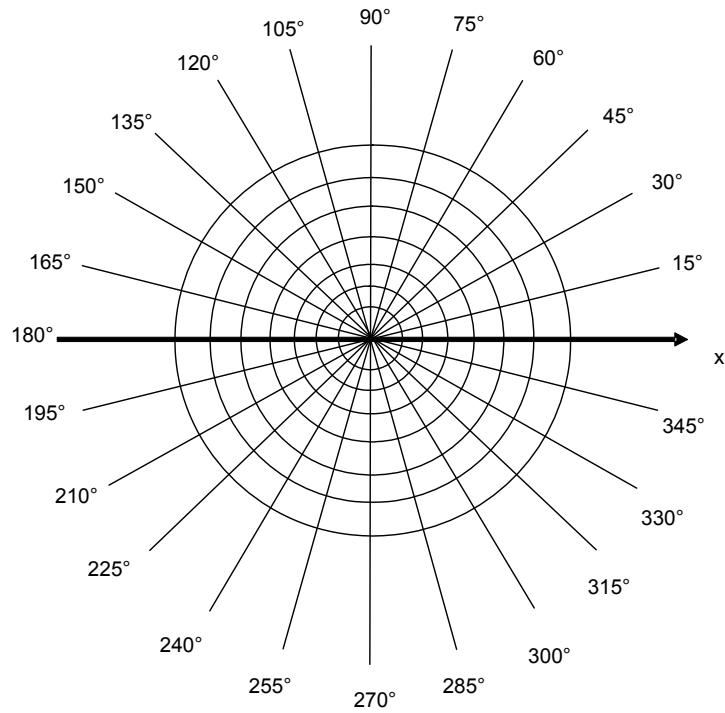
$$x = r \cos \theta = (4) \cos 155^\circ = (4)(-0.9063) = -3.6 \quad y = r \sin \theta = (4) \sin 155^\circ = (4)(0.4226) = 1.7$$

Paso 2

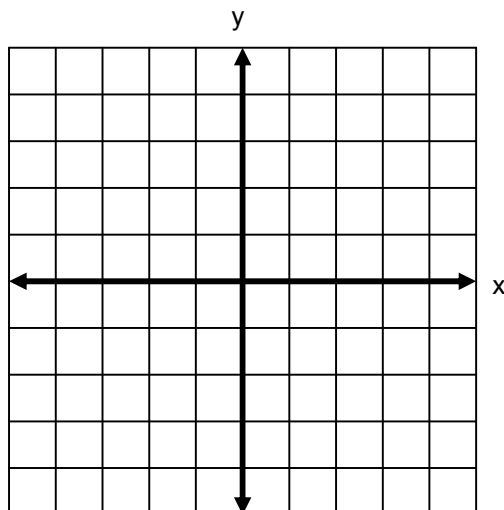
Se grafica la coordenada  $(-3.6, 1.7)$



Ejercita tus conocimientos. Transforma la coordenada  $(5, -4)$  al sistema polar.



Transforma la coordenada  $(2, 76^\circ)$  al sistema rectangular.

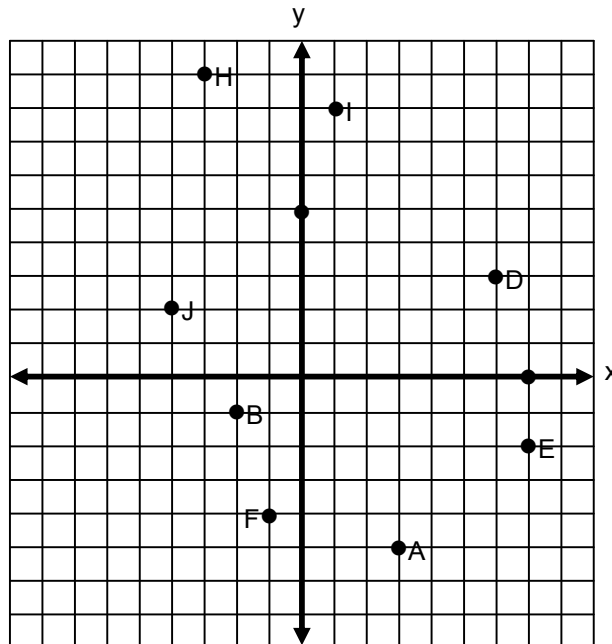


EJERCICIOS

**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se te solicita.

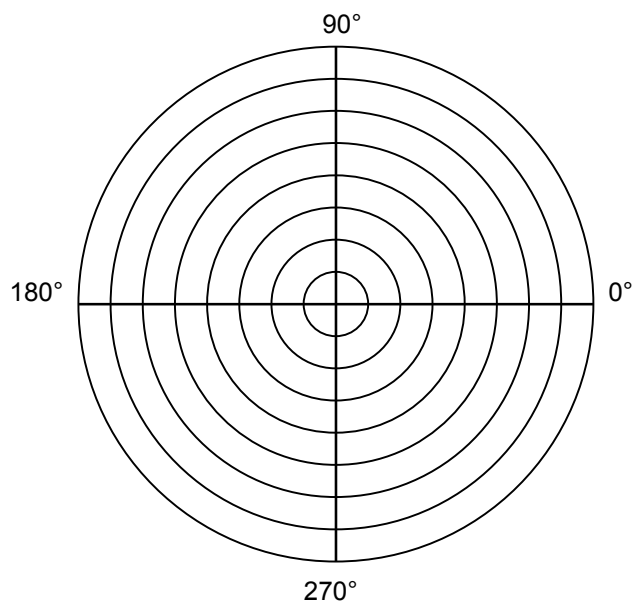
1. Escribe las coordenadas de los puntos representados en el plano cartesiano.

- A ( , )
- B ( , )
- C ( , )
- D ( , )
- E ( , )
- F ( , )
- G ( , )
- H ( , )
- I ( , )
- J ( , )



2. Localiza las siguientes coordenadas polares en el plano.

- A (2, 120°)
- B (5, 240°)
- C (7, 30°)
- D (6, 150°)
- E (2, 310°)
- F (-1, 70°)
- G (3, 340°)
- H (-4, 90°)
- I (6, 180°)
- J (1, 290°)

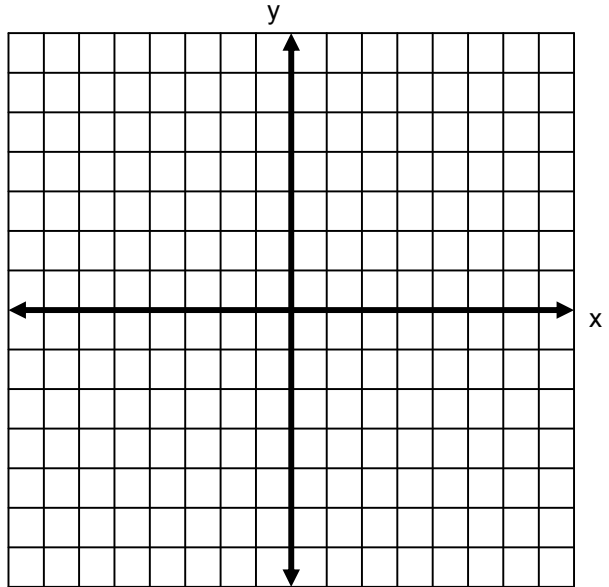


3. Analiza la siguiente función  $x + 4y = 0$ .

I. Completa la tabla.

x	y	(x, y)
3		
2		
1		
0		
-1		
-2		
-3		

II. Grafica la función.

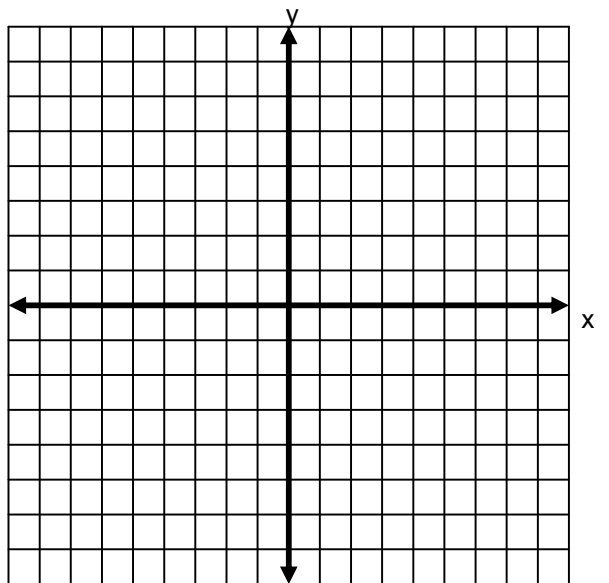


4. Analiza la función  $x^3 - 8x^2 + 15x - y = 0$ .

I. Realiza la tabulación.

x	y	(x, y)
5		
4		
3		
2		
1		
0		

II. Grafica la función.

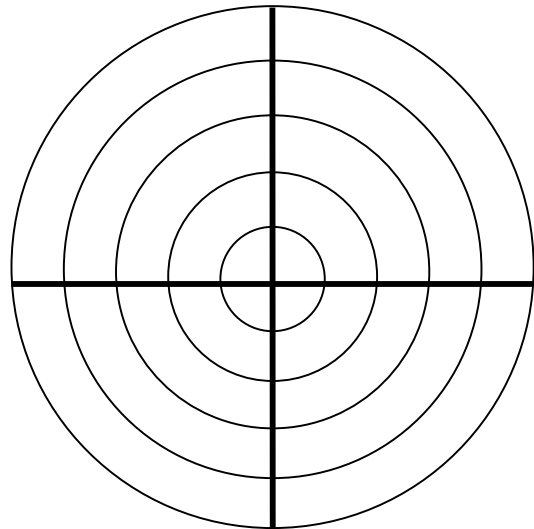


5. Analiza la función  $r \operatorname{sen} \theta = 2$ .

I. Completa la tabla.

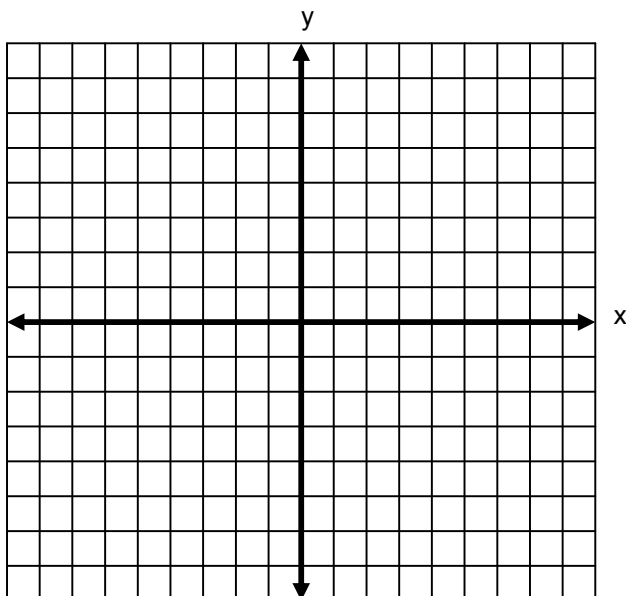
$r$	$\theta$	$(r, \theta)$
	$30^\circ$	
	$45^\circ$	
	$60^\circ$	
	$90^\circ$	
	$120^\circ$	
	$135^\circ$	
	$150^\circ$	

II. Grafica la función.



6. Dados los puntos A (-2, 5) y B (3, -7).

I. Realiza la gráfica.

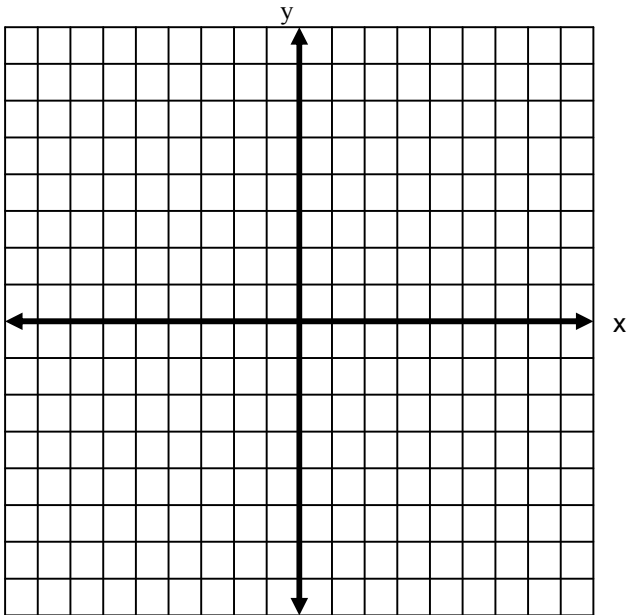


II. Calcula la distancia entre los puntos A y B.

7. Sean los puntos C (-5, 8) y D (4, 1) los extremos de una recta.

I. Realiza la gráfica.

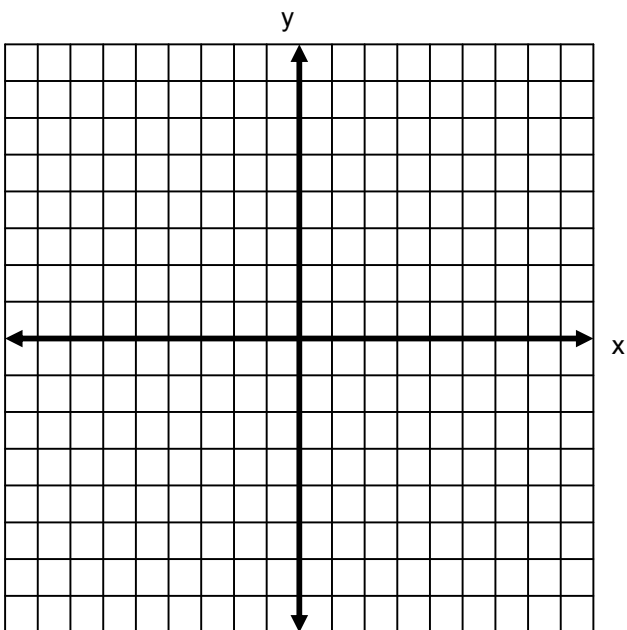
II. Calcula la distancia entre los puntos C y D.



8. Dados los puntos E (3, 1) y F (-2, 4).

I. Realiza la gráfica.

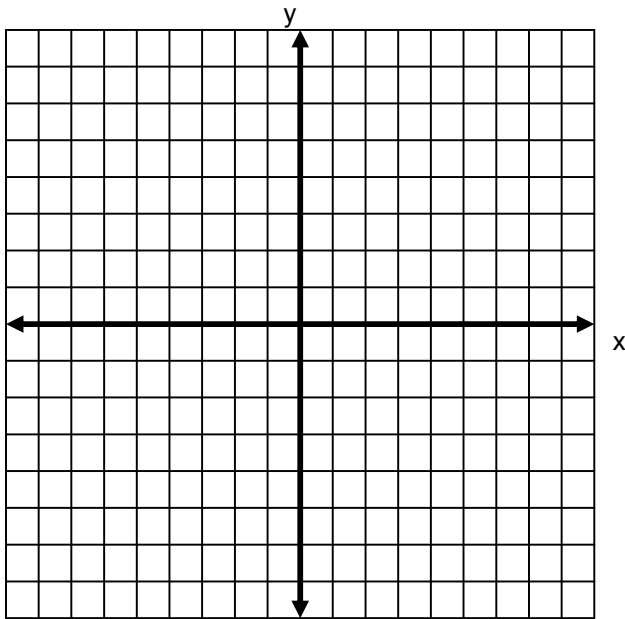
II. Calcula la distancia entre los puntos E y F.



9. Los vértices de un cuadrilátero son  $A(-2, -3)$ ,  $B(6, -2)$ ,  $C(5, -6)$  y  $D(3, 8)$ .

I. Realiza la gráfica.

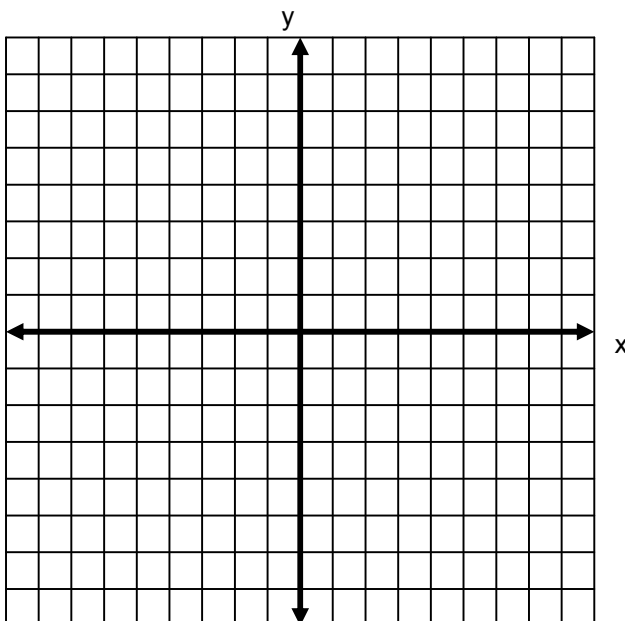
II. Calcula el perímetro del cuadrilátero anterior.



10. Sea el triángulo cuyos vértices son  $A(4, 5)$ ,  $B(3, -2)$  y  $C(1, -4)$ .

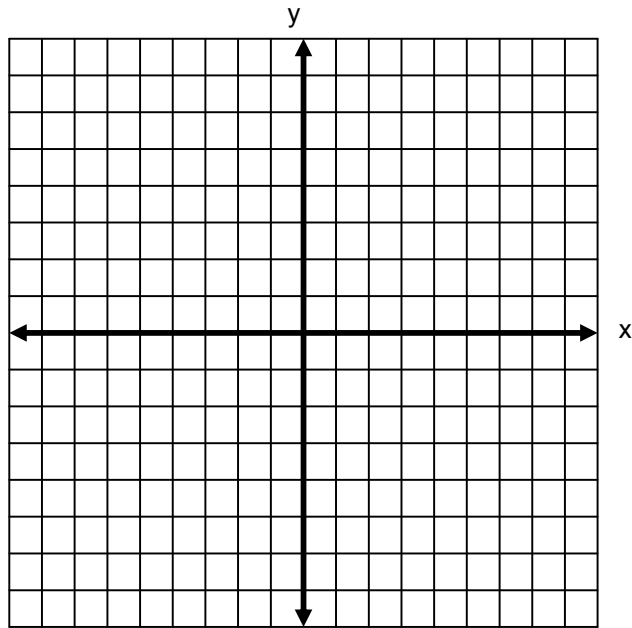
I. Realiza la gráfica.

II. Calcula el perímetro del triángulo graficado.



11. Dados los puntos A(2, 3), B (4, 5) y C (1, 6).

I. Realiza la gráfica.

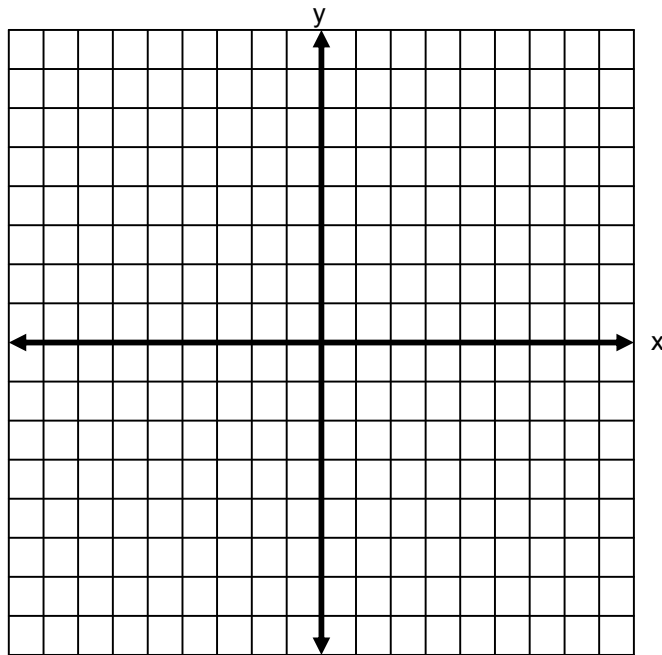


II. Por medio de la distancia entre dos puntos comprueba que se trata de un triángulo isósceles (un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno diferente).



12. Sean los extremos de la recta los puntos A  $(-3, -5)$  y B  $(1, 4)$ .

I. Realiza la gráfica.

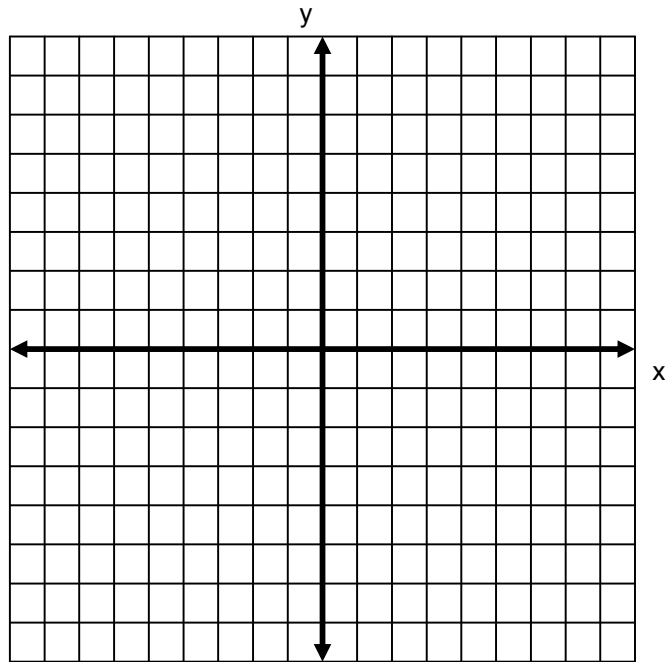


II. Calcula las coordenadas del punto que divide la recta en una razón  $r = 3/7$ .

III. Calcula el punto medio.

13. Los puntos C (6, 8) y D (-7, 2) son los extremos de una recta.

I. Realiza la gráfica.

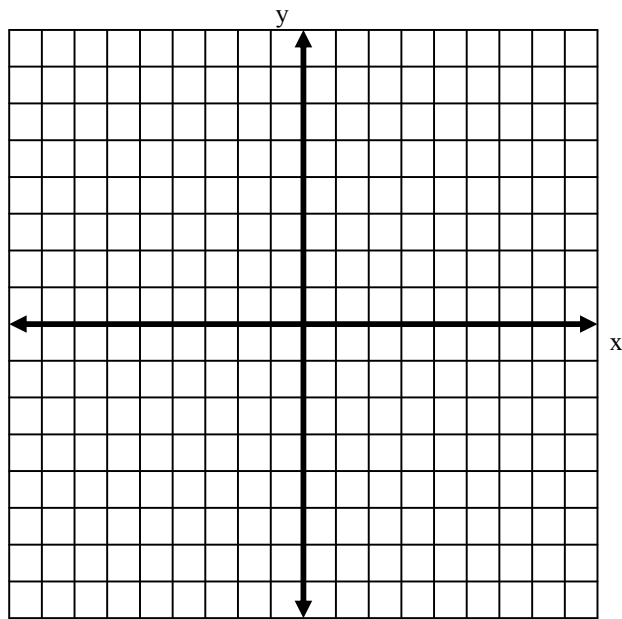


II. Calcula las coordenadas del punto que divide la recta en una razón  $r = 4$ .

III. Calcula el punto medio.

14. Sea el segmento  $M(7, 1)$  y  $N(-1, 5)$ .

I. Realiza la gráfica.



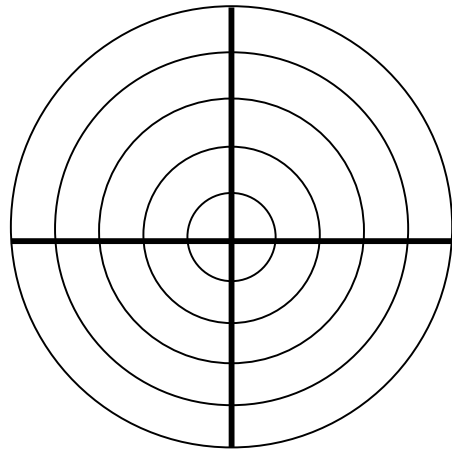
II. Encuentra las coordenadas de los puntos que dividen la recta en cuatro partes iguales.

Analiza las siguientes coordenadas rectangulares.

- a)  $(4, 1)$ ;      b)  $(-5, 7)$ ;      c)  $(-6, 0)$

I. Transforma las coordenadas anteriores a coordenadas polares.

II Realiza la gráfica.



16. Analiza las siguientes coordenadas polares.

- a)  $(5, 50^\circ)$ ;      b)  $(7, 145^\circ)$ ;      c)  $(2, 300^\circ)$

I. Transforma las coordenadas anteriores a coordenadas rectangulares.

II. Realiza la gráfica.

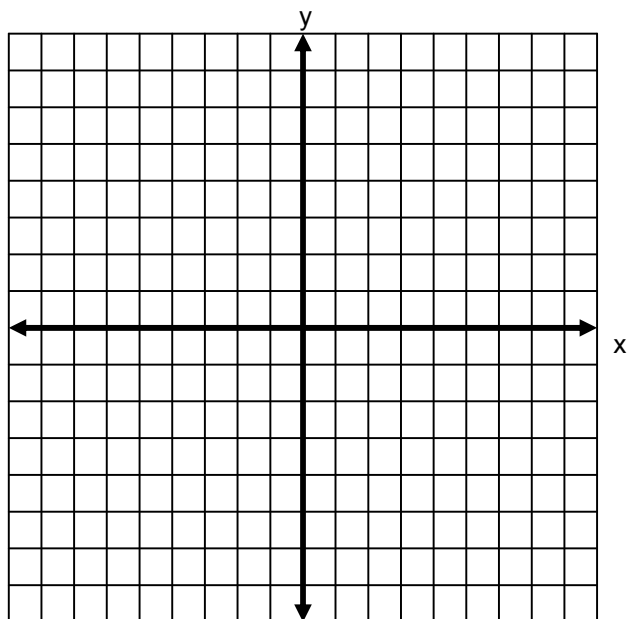
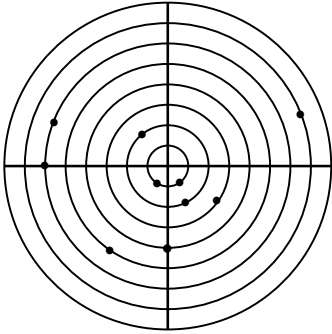
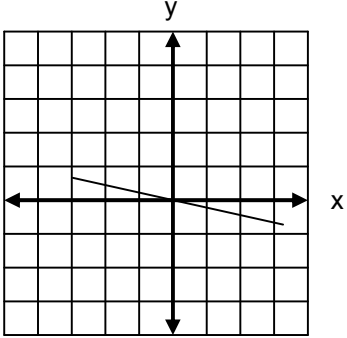
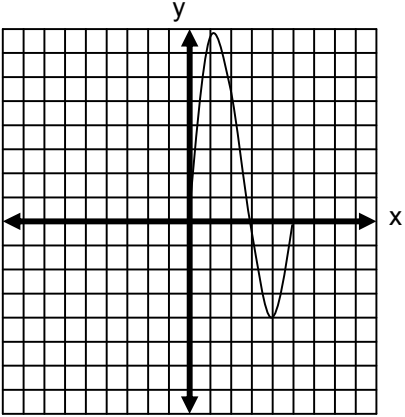
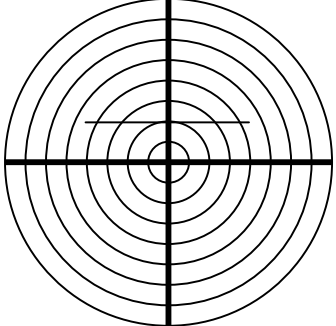
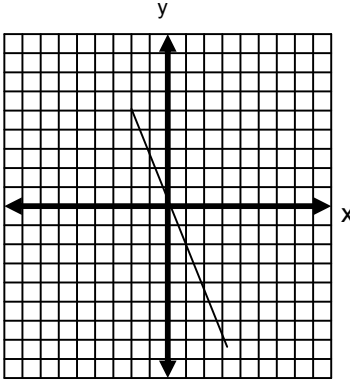
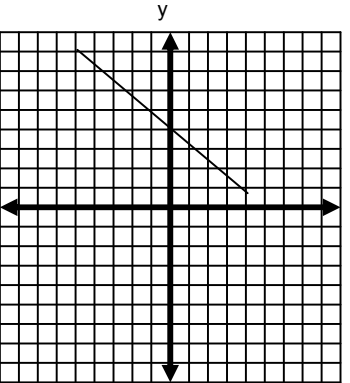
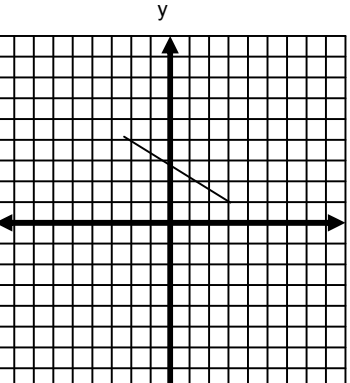
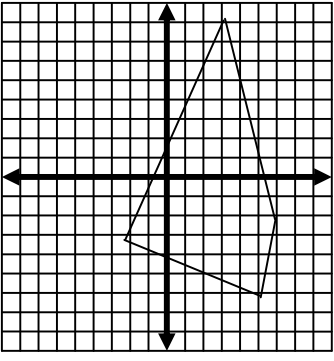
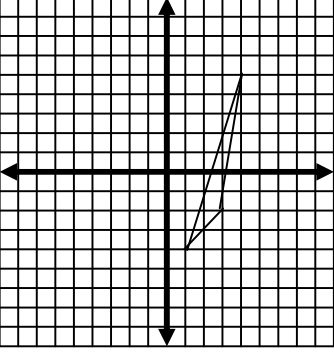
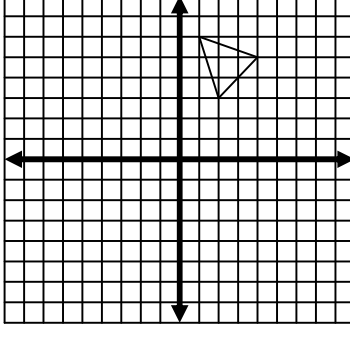


TABLA DE COMPROBACIÓN

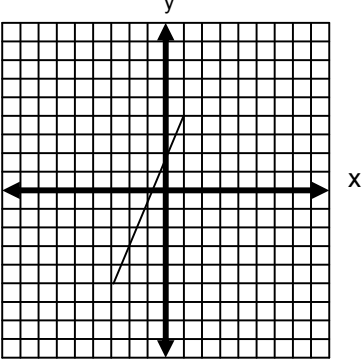
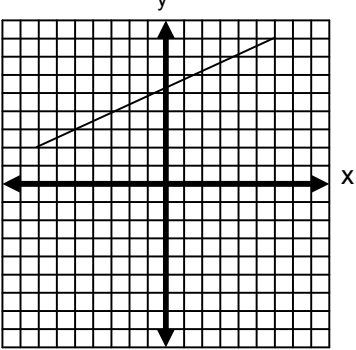
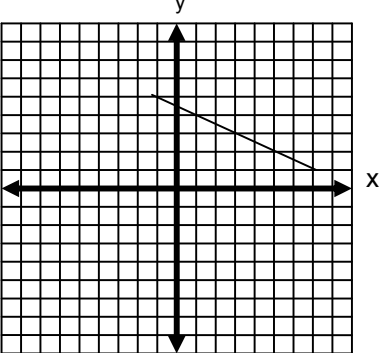
Número de pregunta	Respuesta correcta																								
1	<p>A (3, -5)                      B (-2, -1)                      C (7, 0)                      D (6, 3)                      E (7, -2)                      F (-1, -4)                      G (0, 5)                      H (-3, 9)                      I (1, 8)                      J (-4, 2)</p>																								
2																									
3	<p>i. <math>y = -\frac{x}{4}</math></p> <table border="1" data-bbox="938 1249 1246 1585"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> <th>(x, y)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td><math>-\frac{3}{4}</math></td> <td><math>(3, -\frac{3}{4})</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>-\frac{1}{2}</math></td> <td><math>(2, -\frac{1}{2})</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td><math>-\frac{1}{4}</math></td> <td><math>(1, -\frac{1}{4})</math></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>(0, 0)</td> </tr> <tr> <td>-1</td> <td><math>\frac{1}{4}</math></td> <td><math>(-1, \frac{1}{4})</math></td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td><math>(-2, \frac{1}{2})</math></td> </tr> <tr> <td>-3</td> <td><math>\frac{3}{4}</math></td> <td><math>(-3, \frac{3}{4})</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>ii.</p> 	x	y	(x, y)	3	$-\frac{3}{4}$	$(3, -\frac{3}{4})$	2	$-\frac{1}{2}$	$(2, -\frac{1}{2})$	1	$-\frac{1}{4}$	$(1, -\frac{1}{4})$	0	0	(0, 0)	-1	$\frac{1}{4}$	$(-1, \frac{1}{4})$	-2	$\frac{1}{2}$	$(-2, \frac{1}{2})$	-3	$\frac{3}{4}$	$(-3, \frac{3}{4})$
x	y	(x, y)																							
3	$-\frac{3}{4}$	$(3, -\frac{3}{4})$																							
2	$-\frac{1}{2}$	$(2, -\frac{1}{2})$																							
1	$-\frac{1}{4}$	$(1, -\frac{1}{4})$																							
0	0	(0, 0)																							
-1	$\frac{1}{4}$	$(-1, \frac{1}{4})$																							
-2	$\frac{1}{2}$	$(-2, \frac{1}{2})$																							
-3	$\frac{3}{4}$	$(-3, \frac{3}{4})$																							

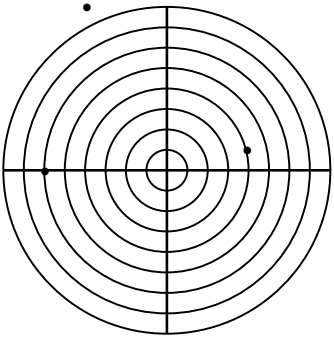
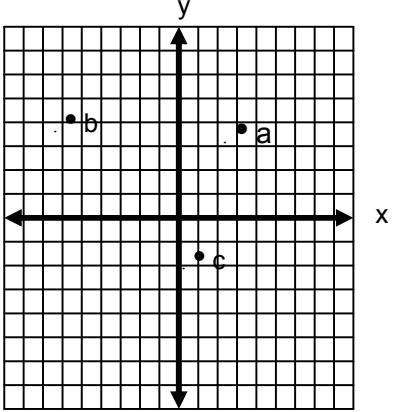
Número de pregunta	Respuesta correcta																								
4	<p>I. <math>y = x^3 - 8x^2 + 15x</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>y</math></th> <th><math>(x, y)</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>5</td><td>0</td><td>(5, 0)</td></tr> <tr><td>4</td><td>-4</td><td>(4, -4)</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>(3, 0)</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>(2, 6)</td></tr> <tr><td>1</td><td>8</td><td>(1, 8)</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>(0, 0)</td></tr> </tbody> </table> <p>II.</p> 	$x$	$y$	$(x, y)$	5	0	(5, 0)	4	-4	(4, -4)	3	0	(3, 0)	2	6	(2, 6)	1	8	(1, 8)	0	0	(0, 0)			
$x$	$y$	$(x, y)$																							
5	0	(5, 0)																							
4	-4	(4, -4)																							
3	0	(3, 0)																							
2	6	(2, 6)																							
1	8	(1, 8)																							
0	0	(0, 0)																							
5	<p>I. <math>r = \frac{2}{\text{sen}\theta}</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>r</math></th> <th><math>\theta</math></th> <th><math>(r, \theta)</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>4</td><td><math>30^\circ</math></td><td><math>(4, 30^\circ)</math></td></tr> <tr><td>2.8</td><td><math>45^\circ</math></td><td><math>(2.8, 45^\circ)</math></td></tr> <tr><td>2.3</td><td><math>60^\circ</math></td><td><math>(2.3, 60^\circ)</math></td></tr> <tr><td>2</td><td><math>90^\circ</math></td><td><math>(2, 90^\circ)</math></td></tr> <tr><td>2.3</td><td><math>120^\circ</math></td><td><math>(2.3, 120^\circ)</math></td></tr> <tr><td>2.8</td><td><math>135^\circ</math></td><td><math>(2.8, 135^\circ)</math></td></tr> <tr><td>4</td><td><math>150^\circ</math></td><td><math>(4, 150^\circ)</math></td></tr> </tbody> </table> <p>II.</p> 	$r$	$\theta$	$(r, \theta)$	4	$30^\circ$	$(4, 30^\circ)$	2.8	$45^\circ$	$(2.8, 45^\circ)$	2.3	$60^\circ$	$(2.3, 60^\circ)$	2	$90^\circ$	$(2, 90^\circ)$	2.3	$120^\circ$	$(2.3, 120^\circ)$	2.8	$135^\circ$	$(2.8, 135^\circ)$	4	$150^\circ$	$(4, 150^\circ)$
$r$	$\theta$	$(r, \theta)$																							
4	$30^\circ$	$(4, 30^\circ)$																							
2.8	$45^\circ$	$(2.8, 45^\circ)$																							
2.3	$60^\circ$	$(2.3, 60^\circ)$																							
2	$90^\circ$	$(2, 90^\circ)$																							
2.3	$120^\circ$	$(2.3, 120^\circ)$																							
2.8	$135^\circ$	$(2.8, 135^\circ)$																							
4	$150^\circ$	$(4, 150^\circ)$																							

Número de pregunta	Respuesta correcta
6	<p>I. </p> <p>II. <math>d = 13</math></p>
7	<p>I. </p> <p>II. <math>d = \sqrt{130} = 11.4</math></p>
8	<p>I. </p> <p>II. <math>d = \sqrt{34} = 5.83</math></p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
9	<p>I.</p>  <p>II. P = 34.26</p>
10	<p>I.</p>  <p>II. P = 19.38</p>
11	<p>I.</p>  <p>II.</p> $d_{AB} = \sqrt{8}$ $d_{BC} = \sqrt{10}$ $d_{CA} = \sqrt{10}$ <p>Sí, es un triángulo isósceles por tener dos lados iguales.</p>



Número de pregunta	Respuesta correcta
12	<p>I. </p> <p>II. <math>P_r\left(-\frac{9}{5}, -\frac{23}{10}\right)</math></p> <p>III. <math>Pm\left(-1, -\frac{1}{2}\right)</math></p>
13	<p>I. </p> <p>II. <math>P_r = \left(-\frac{22}{5}, \frac{16}{5}\right)</math></p> <p>III. <math>Pm\left(-\frac{1}{2}, 5\right)</math></p>
14	<p>I. </p> <p>II. <math>P_1(5, 2)</math>  <math>P_2(3, 3)</math>  <math>P_3(1, 4)</math></p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
15	<p>I. a) <math>(4.1, 14^\circ)</math>                      b) <math>(8.6, 125.5^\circ)</math>                      c) <math>(6, 180^\circ)</math></p> <p>II.</p> 
16	<p>I. a) <math>(3.2, 3.8)</math>                      b) <math>(-5.7, 4.0)</math>                      c) <math>(1.0, -1.7)</math></p> <p>II.</p> 
<p style="text-align: center;"><b>Sugerencias</b></p> <p>En los ejercicios 3 y 4 tienes que despejar “y” para realizar la tabulación.</p> <p>Recuerda que cualquier número negativo elevado al cuadrado tiene como resultado un número positivo.</p> <p>No existen raíces cuadradas negativas.</p>	

## 1.2 Función lineal como lugar geométrico en diferentes sistemas de referencia

### Aprendizajes

- Aplicar el concepto de pendiente de una recta en el cálculo del ángulo de inclinación.
- Calcular el ángulo entre dos rectas a partir del concepto de pendientes.
- Obtener la ecuación general de la recta a partir de la forma punto–pendiente.
- Obtener la ecuación general de la recta a partir de la forma simétrica.
- Aplicar la ecuación de una recta en la solución de problemas
- Construir la gráfica de una recta a partir de una ecuación.
- Construir la gráfica de una función lineal en el sistema polar (forma normal).

La recta se define como el lugar geométrico formado por los puntos de un plano, tales que, si se toman dos cualesquiera de ellos se obtiene la misma pendiente; por lo tanto, empezaremos por la definición de pendiente.

La pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación. Por lo tanto, la inclinación de una recta es el ángulo que forma con el eje  $x$ . Al conocer este ángulo y obtener el valor de la tangente conocemos su pendiente; o a través de dos puntos de coordenadas  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , por medio de la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Cuando dos rectas se intersectan en un plano forman cuatro ángulos, los cuales se pueden determinar si se conocen las pendientes de las rectas utilizando la siguiente fórmula:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

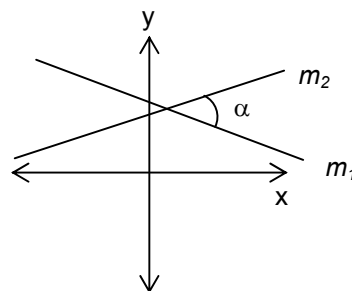


Figura 1

Existen dos casos especiales cuando se intersectan dos rectas.

- 1) Si las rectas son paralelas las pendientes son iguales; por lo tanto,  $m_1 = m_2$ .
- 2) Si las rectas son perpendiculares el producto de las pendiente es igual a  $-1$ ,  $m_1 m_2 = -1$ .

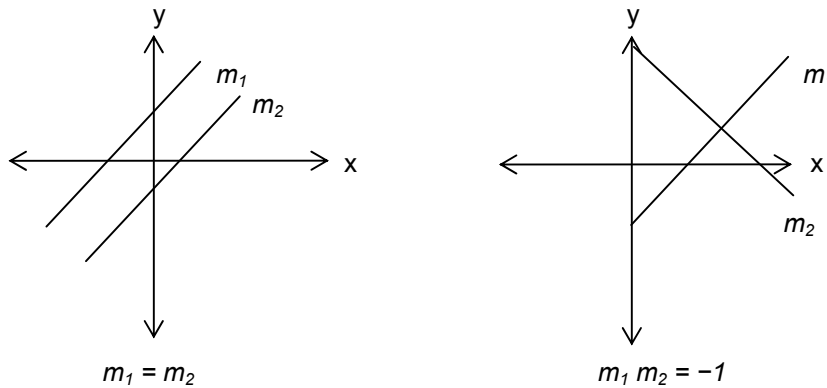


Figura 2

La ecuación de la recta se puede determinar si se conocen al menos dos parámetros de ella, lo cual se cumple en los siguientes casos:

- ❖ Punto – pendiente.
- ❖ Pendiente – ordenada al origen.
- ❖ Dos puntos.
- ❖ Simétrica.
- ❖ Ecuación general.
- ❖ Forma normal.

**Punto – pendiente:** A partir de conocer un punto  $P_1 (x_1, y_1)$  por donde pasa la recta y el valor de la pendiente ( $m$ ), se puede conocer la ecuación de la recta con la fórmula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**Dos puntos:** Al conocer dos puntos por donde pasa la recta  $P_1 (x_1, y_1)$  y  $P_2 (x_2, y_2)$  y a partir de la fórmula anterior deducimos la siguiente fórmula para representar la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

**Simétrica:** Si se conocen las intersecciones de la recta con los ejes “ $x$ ” y “ $y$ ” cuyas coordenadas son los puntos  $P_1 (a, 0)$  y  $P_2 (0, b)$  se obtiene la forma simétrica de la recta.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

**Ecuación general:** Es la forma más común de reportar la ecuación de la recta, cuya representación es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

De la fórmula general podemos obtener los datos de la pendiente de la recta ( $m$ ) y las intersecciones con los ejes "x" y "y" aplicando las fórmulas siguientes:

$$m = -\frac{A}{B} \quad a = -\frac{C}{A} \quad b = -\frac{C}{B}$$

Donde:

$a$  = intersección con el eje x.

$b$  = intersección con el eje y.

**Forma normal:** Para cambiar de la forma general  $Ax + By + C = 0$  a la forma normal  $x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$ , se utilizan las fórmulas:

$$\cos \omega = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad \sin \omega = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Donde:

$\omega$  = ángulo de inclinación de la recta.

$p$  = distancia del origen a la recta.

Con estos valores se calcula el ángulo de inclinación de la recta y su distancia al origen obteniendo la siguiente fórmula:

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Donde:

$$-p = \frac{C}{k}$$

$$k = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$$

**El signo que precede al radical será el signo contrario al término C para encontrar la forma normal.**

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$$

Una aplicación de la forma normal de la recta es **calcular la distancia de un punto a una recta**, siendo las coordenadas del punto  $P_1 (x_1, y_1)$  y la ecuación de la recta  $Ax + By + C = 0$ .

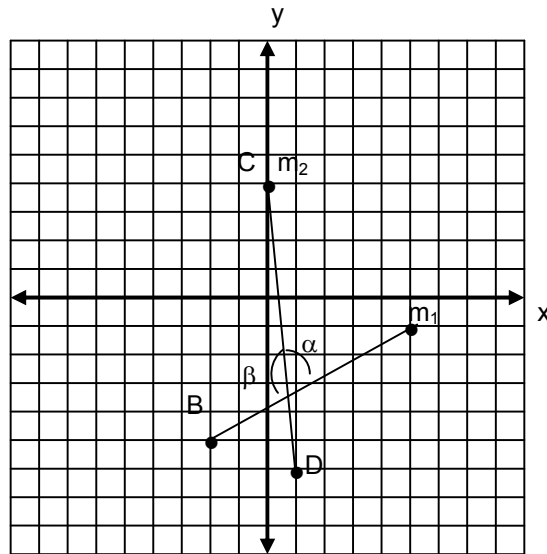
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

### APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Observa en el siguiente ejercicio cómo se obtiene el valor de los ángulos entre dos rectas que se cortan entre sí y pasan por los puntos A (5, -1), B (-2, -5) y C (0, 4), D (1, -6).

Paso 1

Se localizan los puntos en el plano cartesiano y se traza la gráfica.



Paso 2

Se calculan las pendientes de las rectas  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  con la fórmula:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$m_{AB} = m_1 = \frac{-5 - (-1)}{-2 - 5} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

$$m_{CD} = m_2 = \frac{-6 - 4}{1 - 0} = -10$$

Paso 3

Para calcular el ángulo entre las rectas ocupamos la fórmula de la tangente y sustituimos los valores de las pendientes:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-10 - \frac{4}{7}}{1 + (-10)\left(\frac{4}{7}\right)} = \frac{\frac{-70 - 4}{7}}{1 - \frac{40}{7}} = \frac{\frac{-74}{7}}{\frac{7 - 40}{7}} = \frac{\frac{-74}{7}}{\frac{-33}{7}} = \frac{74}{33}$$

El primer ángulo se obtiene por la función inversa de tangente.

$$\alpha = \text{arc tan} \frac{74}{33} = 65.9657^\circ \approx 66^\circ$$

Para obtener el segundo ángulo formado por las intersecciones de la recta, a  $180^\circ$  se resta el valor del ángulo anterior, con lo cual encontramos los valores buscados.

$$\beta = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ$$

Veamos otro ejemplo. A partir de los datos de pendiente y un punto por donde pasa obtendremos la ecuación de la recta  $\overline{AB}$  en forma general.

$$m_{AB} = \frac{4}{7} \quad A(5, -1)$$

Los datos se sustituyen en la fórmula punto–pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{4}{7}(x - 5)$$

$$y + 1 = \frac{4}{7}(x - 5)$$

$$7(y + 1) = 4(x - 5)$$

$$7y + 7 = 4x - 20$$

$$4x - 7y - 20 - 7 = 0$$

Con lo cual obtenemos la siguiente ecuación:

$$4x - 7y - 27 = 0$$

Enseguida transformamos la ecuación anterior,  $4x - 7y - 27 = 0$ , a la forma normal de la recta.

Paso 1

Se calcula el valor del radical con la fórmula.

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} = 8.06$$

El signo del radical debe ser contrario al signo de C, en este caso  $-27$ ; por lo tanto:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 8.06$$

Paso 2

Cada término de la ecuación se divide entre 8.06.

$$\frac{4x}{8.06} - \frac{7y}{8.06} - \frac{27}{8.06} = 0$$

$$0.49x - 0.86y - 3.34 = 0$$

Donde:

$$\cos \omega = 0.49; \quad \text{sen } \omega = 0.86; \quad p = 3.34$$

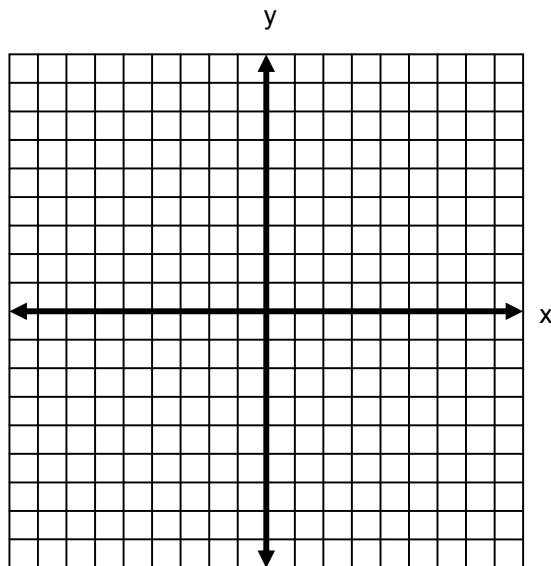
Por lo tanto:

$$\omega = \text{arc cos } 0.49 = 60.65^\circ$$

$$x \cos 60.65^\circ - y \text{ sen } 60.65^\circ - 3.34 = 0$$

Ejercita tus conocimientos realizando el siguiente ejercicio.

Por medio de la pendiente de la recta determina si la recta A (-3, 5), B (-2, -5) y la recta C (0, 4), D (1 -6) son perpendiculares o paralelas entre sí.

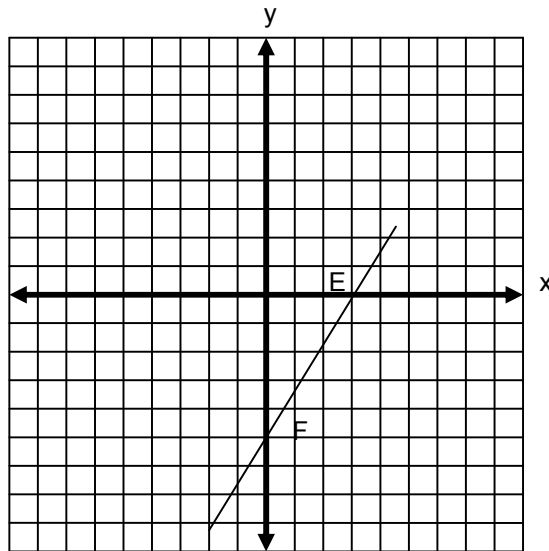


Encuentra la ecuación de la recta  $\overline{CD}$  en forma general.



Convierte a la forma normal la ecuación anterior.

Analiza la siguiente gráfica, vamos a obtener la ecuación de la recta en forma simétrica.



Paso 1

Las intersecciones con los ejes son los puntos E (3, 0) y F (0, -5).

Paso 2

Los puntos anteriores se sustituyen en la ecuación simétrica de la recta.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$$

Paso 3

Ahora, de la ecuación anterior encontraremos la ecuación de la recta en forma general.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$$

Resolvemos la ecuación :

$$\frac{5x - 3y}{15} = 1 \quad \rightarrow \quad 5x - 3y = 15$$

Por lo tanto :

$$5x - 3y - 15 = 0$$

A continuación vamos a calcular la distancia de la recta al punto P (6, -1).

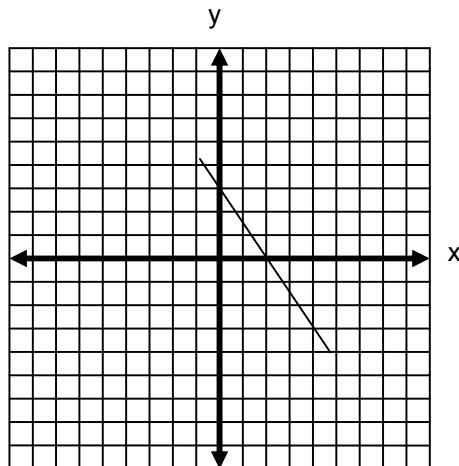
Se sustituyen en la ecuación los valores del punto dado.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|(5)(6) + (-3)(-1) - 15|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{|30 + 3 - 15|}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{18}{\sqrt{34}} = \frac{18}{5.83} = 3.08$$

Ahora ejercita tus conocimientos realizando el siguiente ejercicio.

Analiza la siguiente gráfica.



Obtén la ecuación de la recta en forma simétrica.

Encuentra la ecuación de la recta en forma general.

Calcula la distancia de la recta al punto  $P(-4, 5)$ .

A continuación observa cómo se grafica la recta  $3x - 2y + 10 = 0$

Paso 1

Se calculan las intersecciones de la recta con los ejes "x" y "y" con las fórmulas:

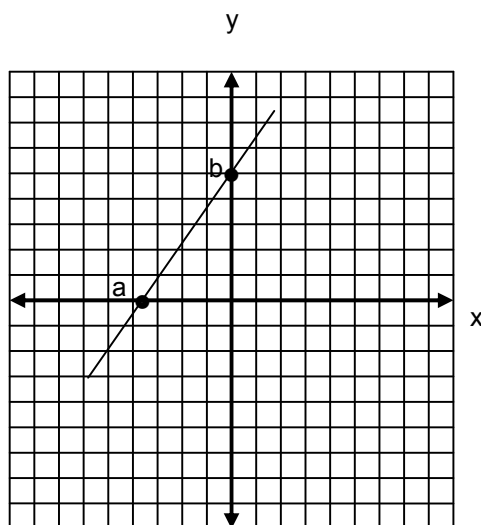
$$a = -\frac{C}{A} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

$$a = -\frac{10}{3} \qquad b = -\frac{10}{-2}$$

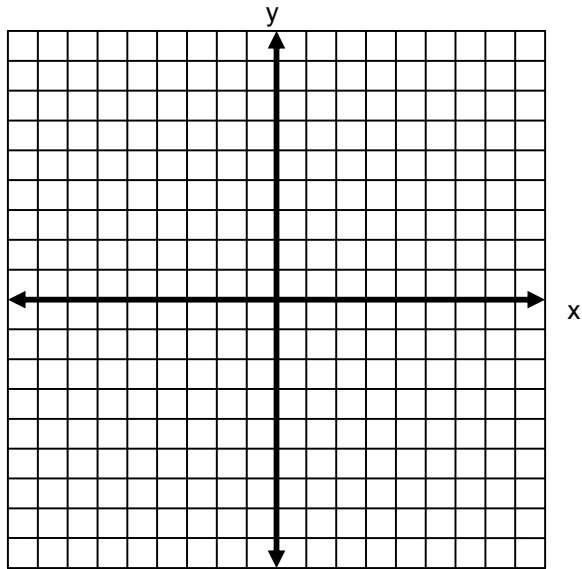
$$b = \frac{10}{2} = 5$$

Paso 2

Los valores anteriores se localizan en el plano cartesiano y se traza una recta que pase por ambos puntos.



Ahora ejercita tus conocimientos, realiza la gráfica de la recta  $4x + 6y - 14 = 0$

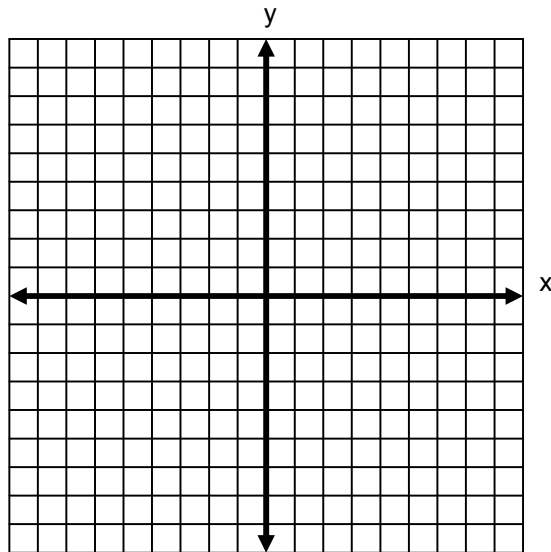


## EJERCICIOS

**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se te solicita.

1. Dados los puntos M  $(-4, 8)$  y N  $(3, 5)$ .

I. Realiza la gráfica.

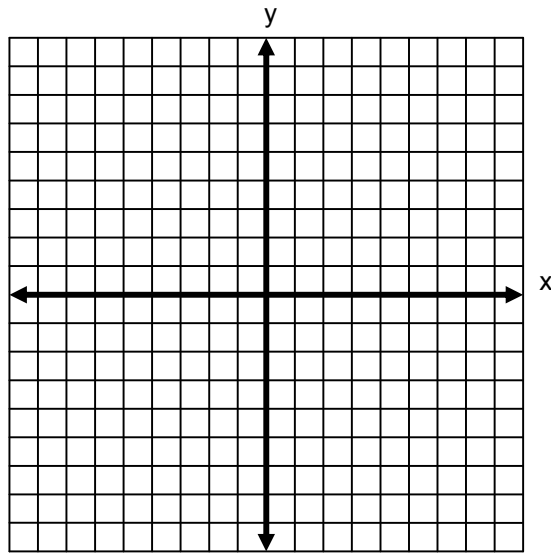


II. Obtén la pendiente de la recta.

III. Calcula el ángulo de inclinación.

2. Sean los siguientes puntos J (1, 3), K (-2, -3) y L (0, 1).

I. Realiza la gráfica.



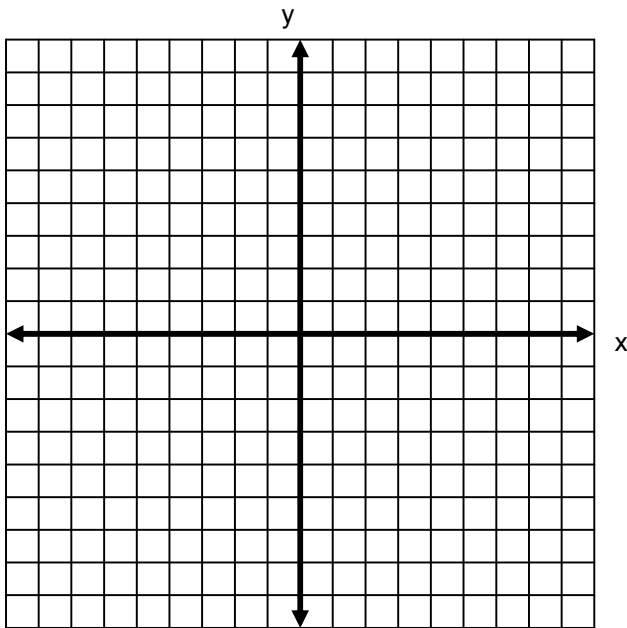
II. Comprueba, por medio de pendientes, que son puntos colineales.

III. Calcula el ángulo de inclinación de la recta.

3. Sean los puntos L (3, 1), M (7, 2) y N (1, 9).

I. Realiza la gráfica.

II. Por medio de pendientes comprueba si los puntos L, M y N forman un triángulo rectángulo.

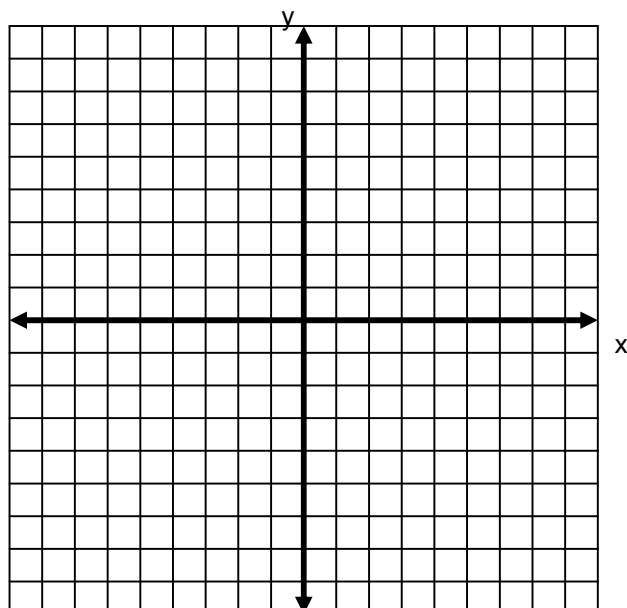


4. Sean los puntos F (2, 2), G (-2, -4) y P (3, 1), Q (-2, 4).

I. Realiza la gráfica.

II. Calcula los ángulos formados por las rectas  $\overline{FG}$  y  $\overline{PQ}$ .

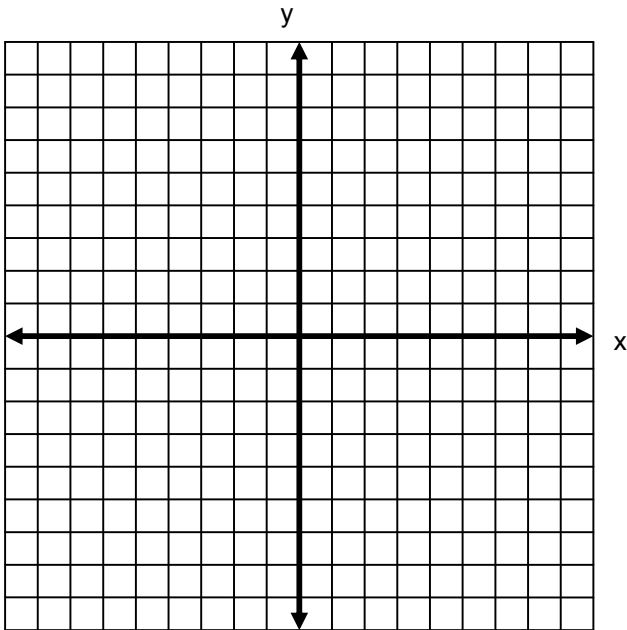
$\overline{PQ}$ .



5. Sean los puntos A (-2, -3), B (-1, 7) y C (4, 2).

I. Realiza la gráfica.

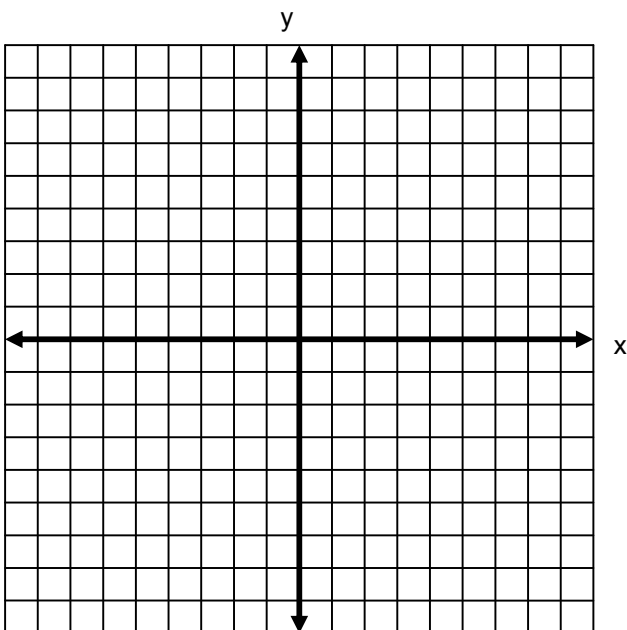
II. Calcula los ángulos interiores del triángulo ABC.



6. Sean los puntos A (1, 1), B (5, 3), C (8, 0) y D (4, -2).

I. Realiza la gráfica.

II. Calcula el ángulo obtuso de la figura.

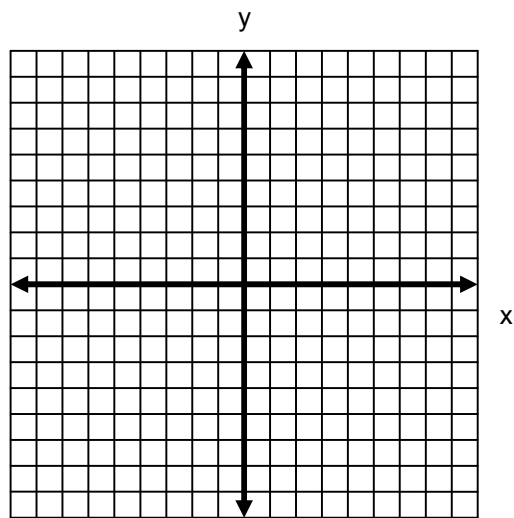




7. Una recta pasa por el punto D  $(-6, 4)$  y tiene una pendiente de  $-\frac{7}{8}$ .

I. Obtén la ecuación de la recta en su forma general.

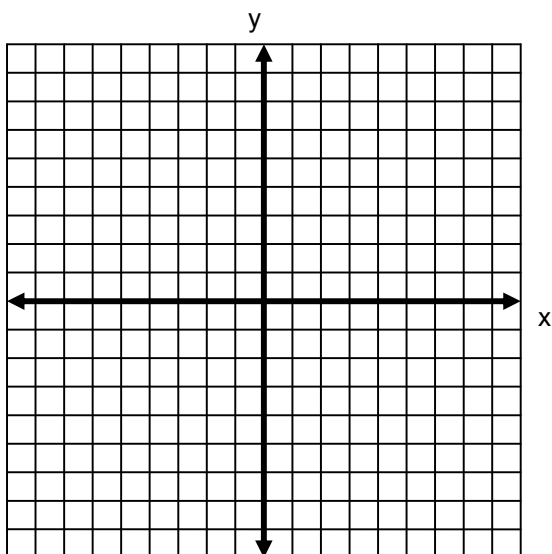
II. Realiza la gráfica.



8. Sean los puntos T  $(-6, -3)$  y U  $(-2, 4)$ .

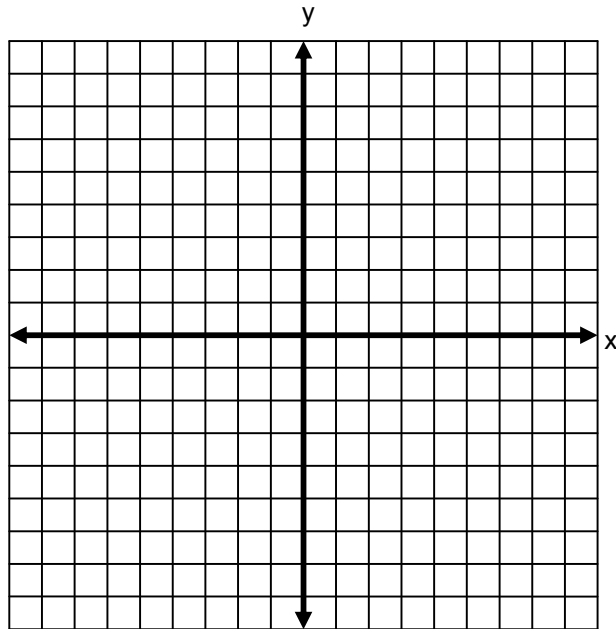
I. Realiza la gráfica.

II.. Obtén la ecuación general de la recta.



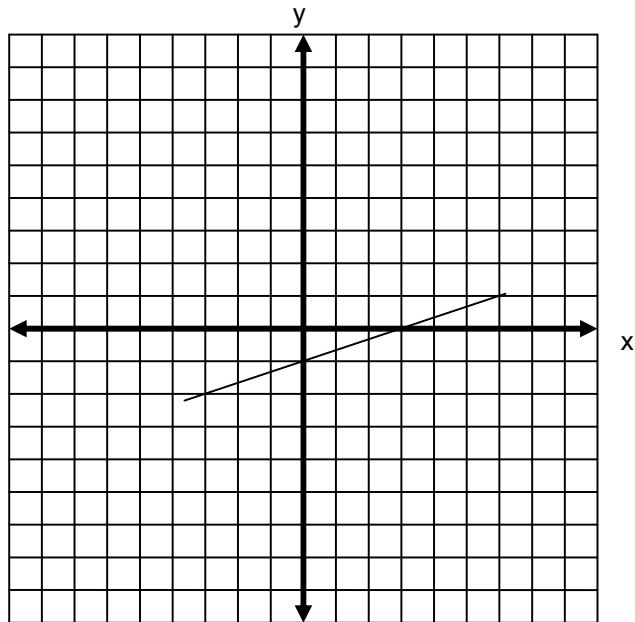
9. Sean los puntos  $G(-3, 3)$  y  $H(5, -2)$ .

Realiza la gráfica.



II. Obtén la ecuación de la recta en forma general que pasa por los puntos  $G$  y  $H$ .

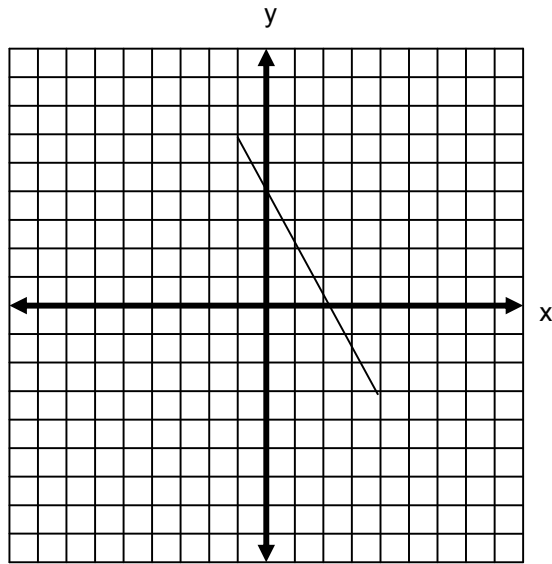
10. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra la ecuación de la recta en forma simétrica.

II. Encuentra la ecuación general de la recta.

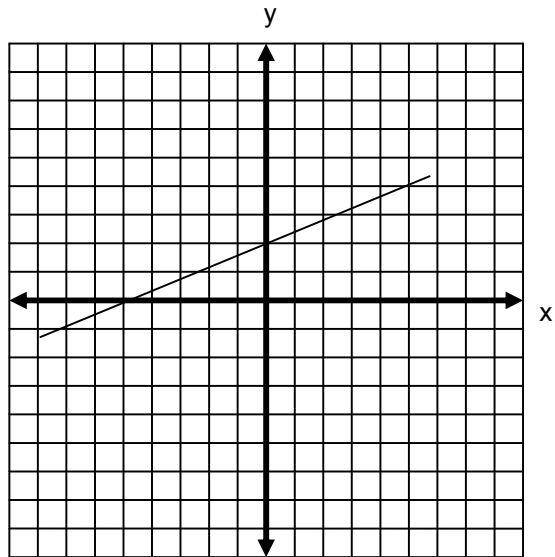
11. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra la ecuación de la recta en forma simétrica.

II. Encuentra la ecuación general de la recta.

12. Analiza la siguiente gráfica.



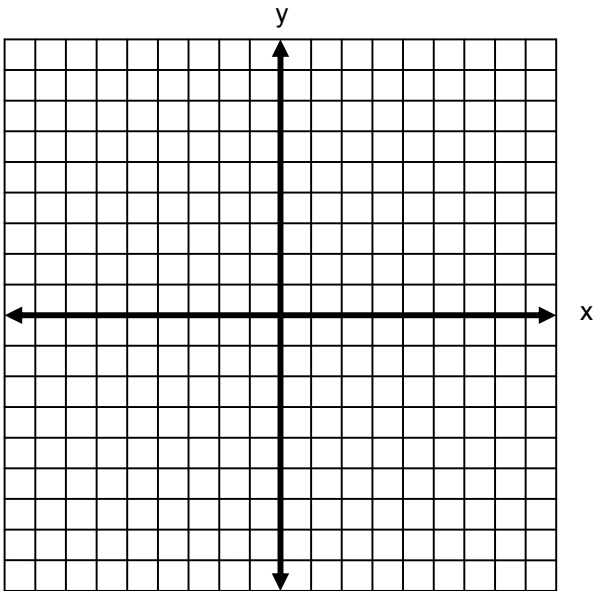
I. Encuentra la ecuación de la recta en forma simétrica.

II. Encuentra la ecuación general de la recta.

13. Sea la recta que pasa por los puntos A (7, 6) y B (-5, 2).

I. Realiza la gráfica.

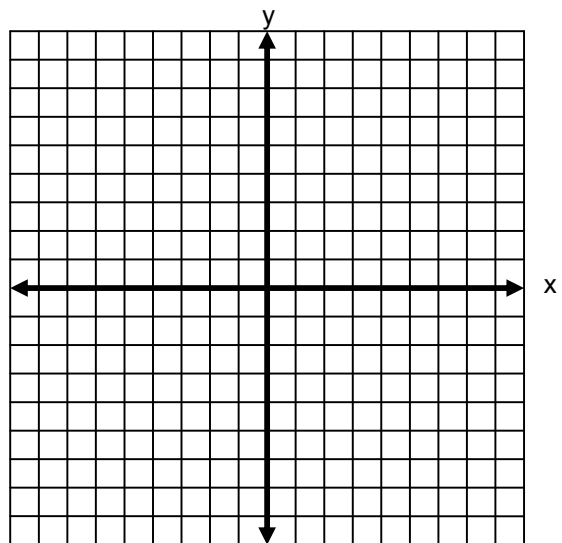
II. Obtén la ecuación de la mediatriz.



14. Una recta pasa por el punto P (4, -2) y es paralela a la recta  $3x - 7y + 3 = 0$ .

I. Encuentra la ecuación general de la recta.

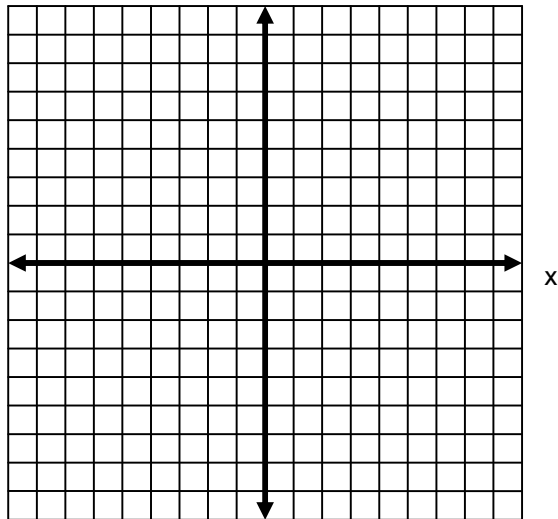
II. Realiza la gráfica.



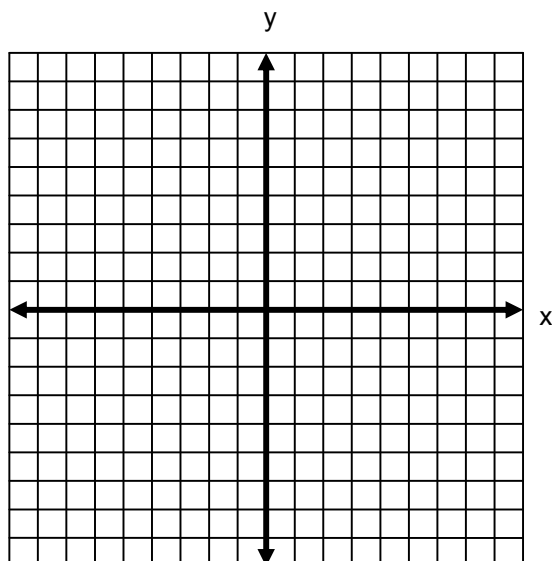
15. Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas  $2x + 3y - 5 = 0$  y  $3x - y - 2 = 0$ .

I. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto anterior y es perpendicular a la recta  $4x + y - 7 = 0$ .

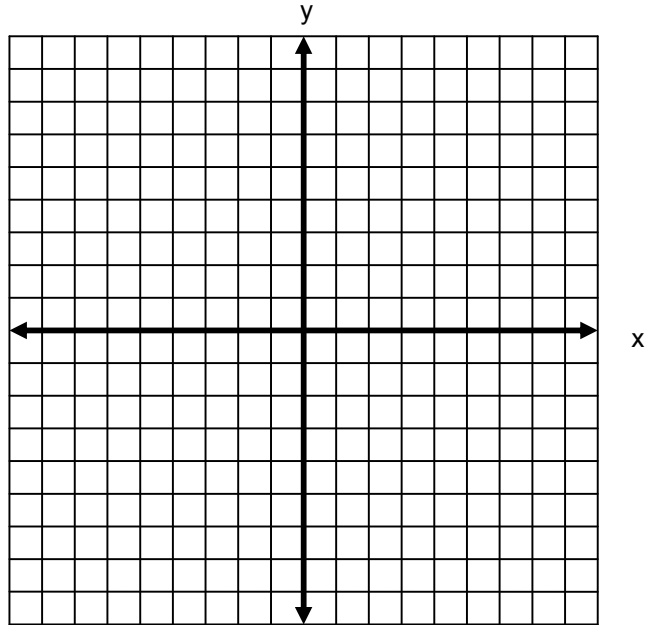
II. Realiza la gráfica.



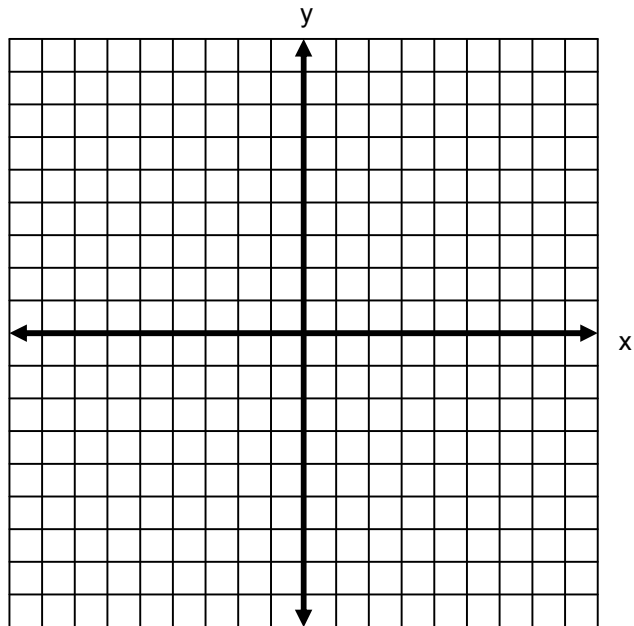
16. Construye la gráfica de la siguiente recta  $7x - 2y + 5 = 0$ .



17. Construye la gráfica de la siguiente recta  $y - 4 = \frac{1}{3}(x + 5)$ .



18. Construye la gráfica de la siguiente recta  $6x + 4y - 5 = 0$ .



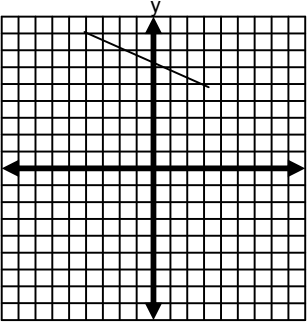
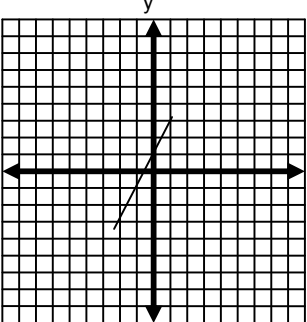


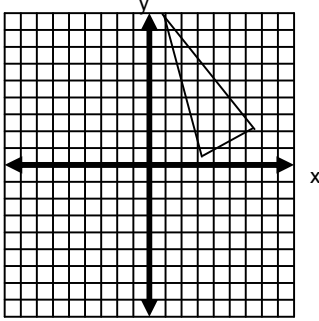
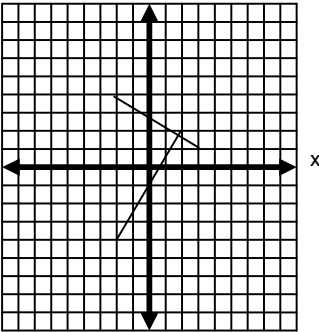
19. Encuentra la forma normal de la ecuación  $2x + 3y - 5 = 0$ .

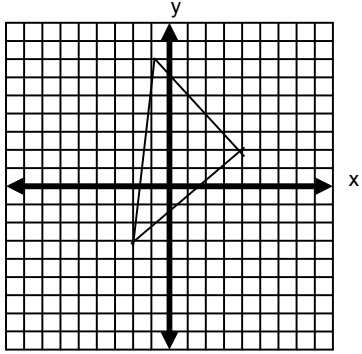
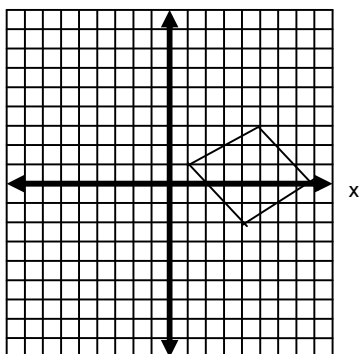
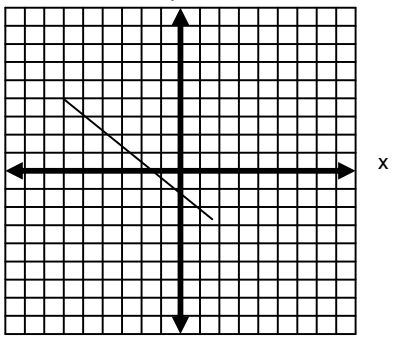
20. Encuentra la forma normal de la ecuación  $3x - y + 5 = 0$ .

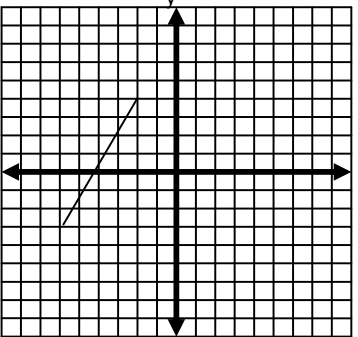
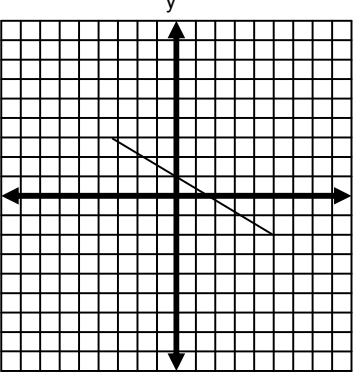
21. Calcula la distancia entre la recta  $4x + 3y + 3 = 0$  y el punto C (2, 3).

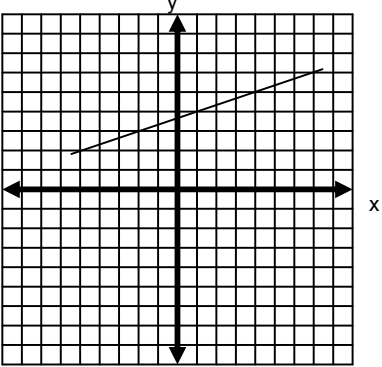
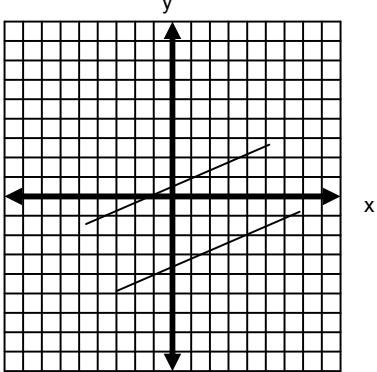
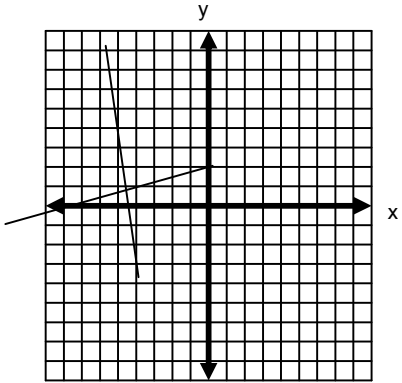
TABLA DE COMPROBACIÓN

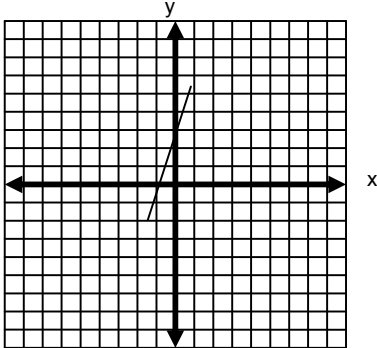
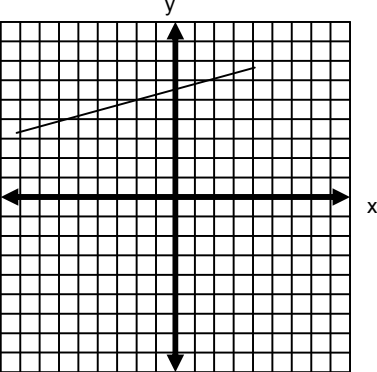
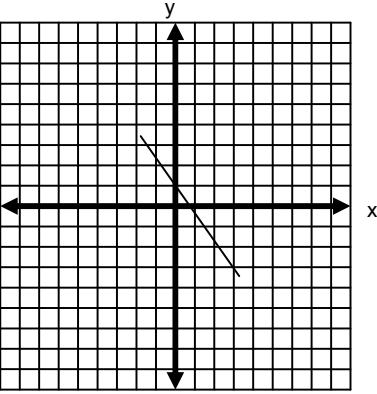
Número de pregunta	Respuesta correcta
1	<p>I. </p> <p>II. <math>m = -3/7</math></p> <p>III. <math>156.80^\circ</math></p>
2	<p>I. </p> <p>II. <math>m_{JK} = 2</math>  <math>m_{KL} = 2</math>  <math>m_{JL} = 2</math></p> <p>Las pendientes son iguales, por lo tanto, los puntos son colineales.</p> <p>III. <math>\alpha = 63.43^\circ</math></p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
3	<p>I. </p> <p>II. <math>m_{LM} = \frac{1}{4}</math>  <math>m_{MN} = -\frac{7}{6}</math>  <math>m_{NL} = -4</math></p> <p>Es un triángulo rectángulo por tener dos pendientes inversas.</p>
4	<p>I. </p> <p>II. <math>m_2 = \frac{3}{2}</math>  <math>M_1 = -\frac{3}{5}</math>  <math>\alpha = 87^\circ 16' 25''</math>  <math>\beta = 92^\circ 43' 35''</math></p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
5	<p>I. </p> <p>II. <math>\alpha = 44^\circ 29' 02''</math>  <math>\beta = 84^\circ 48' 20''</math>  <math>\chi = 50^\circ 42' 38''</math></p>
6	<p>I. </p> <p>II. <math>m_1 = \frac{1}{2}</math>  <math>m_2 = -1</math>  <math>\alpha = 108^\circ 26' 05''</math></p>
7	<p>I. <math>7x + 8y + 10 = 0</math></p> <p>II. </p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
8	I.  II. $7x - 4y + 30 = 0$
9	I.  II. $5x + 8y - 9 = 0$
10	I. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} = 1$ II. $x - 3y - 3 = 0$
11	I. $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ II. $4x + 2y - 8 = 0$
12	I. $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$ II. $2x - 5y + 10 = 0$

Número de pregunta	Respuesta correcta
13	<p>I. </p> <p>II. <math>3x + y - 7 = 0</math></p>
14	<p>I. <math>3x - 7y - 26 = 0</math></p> <p>II. </p>
15	<p>I. <math>x - 4y + 3 = 0</math></p> <p>II. </p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
16	
17	
18	

Número de pregunta	Respuesta correcta
19	$\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0$ $\varpi = 56^\circ 18' 35''$ $p = \frac{5}{\sqrt{13}}$ $x \cos 56^\circ 18' 35'' + y \operatorname{sen} 56^\circ 18' 35'' - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0$
20	$-\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$ $\varpi = 161^\circ 33' 54''$ $p = \frac{5}{\sqrt{10}}$ $x \cos 161^\circ 33' 54'' + y \operatorname{sen} 161^\circ 33' 54'' - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$
21	$d = 4u$
<b>Sugerencias</b>	
<p>Si el valor del ángulo de inclinación es negativo debes sumar 180°.</p> <p>Tres puntos son colineales si están dentro de una misma recta.</p> <p>Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90°.</p> <p>La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.</p> <p>Un ángulo obtuso es mayor que 90° y menor que 180°.</p> <p>En la ecuación general de la recta el valor de x siempre es positivo.</p> <p>Al transformar la ecuación de una recta de la forma general a la forma normal el signo del radical es contrario al signo del término independiente.</p>	



### 1.3 Aplicación de las funciones lineales

#### Aprendizajes

- Aplicar el concepto de desigualdad en la solución de problemas.
- Representar la desigualdad en el plano cartesiano.
- Resolver gráficamente un sistema de desigualdades lineales.

Una de las aplicaciones de las funciones lineales es la programación lineal para la resolución de problemas. Para poder entender este tema se tiene que empezar por el concepto de desigualdad.

**Desigualdad:** Es toda proposición que relaciona dos expresiones algebraicas con los símbolos de mayor que ( $>$ ), menor que ( $<$ ), mayor o igual que ( $\geq$ ) o menor igual que ( $\leq$ ).

Algunas de las propiedades de las desigualdades son:

$$\text{Si } a > b \text{ y } b > c \quad \text{entonces} \quad a > c$$

$$\text{Si } a > b \quad \text{entonces} \quad a + c > b + c$$

$$\text{Si } a > b \quad \text{entonces} \quad a - c > b - c$$

$$\text{Si } a > b \text{ y } c > 0 \quad \text{entonces} \quad ac > bc$$

$$\text{Si } a > b \text{ y } 0 > c \quad \text{entonces} \quad ac < bc$$

La solución de una desigualdad es un conjunto de números reales comprendidos en un intervalo, el cual puede ser abierto, cerrado o semiabierto (abierto-cerrado, cerrado-abierto).

a) Intervalo abierto: Es aquél en el cual no se incluyen los extremos  $(a, b)$ .

b) Intervalo cerrado: Es aquél en el cual se incluyen los extremos  $[a, b]$ .

c) Intervalo abierto-cerrado: Es aquél en el cual se incluye el extremo derecho pero no el izquierdo  $(a, b]$ .

d) Intervalo cerrado-abierto: Es aquél en el cual se incluye el extremo izquierdo pero no el derecho  $[a, b)$ .

Para resolver una desigualdad con dos variables la solución no es única, es decir, existe un número infinito de puntos que dan solución a la desigualdad.

En nuestro caso la solución a la desigualdad será el área sombreada, como se aprecia en la siguiente figura.

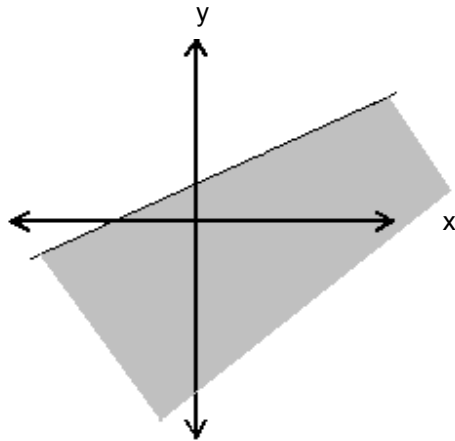


Figura 1

Para la solución de problemas consideraremos el área sombreada que satisfaga las condiciones de un sistema de desigualdades, como se muestra en la siguiente figura.

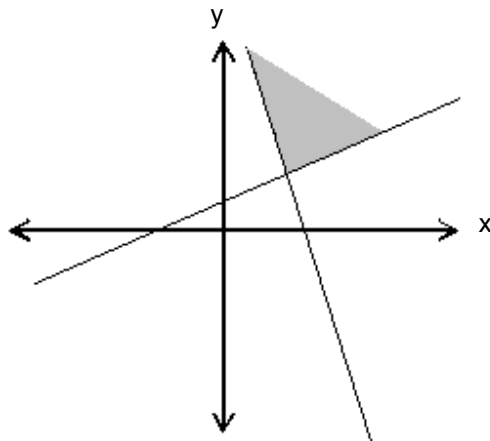


Figura 2

**APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO**

Observa el procedimiento para encontrar la solución del siguiente problema.

Las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius se relacionan con la fórmula:

$$^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} (^{\circ}\text{F} - 32) \quad \text{¿En qué intervalo de temperaturas en } ^{\circ}\text{F} \text{ corresponde } 30 \leq ^{\circ}\text{C} \leq 40?$$

Paso 1

En la fórmula anterior se sustituye la relación entre grados Fahrenheit y Celsius.

$$30 \leq \frac{5}{9} (^{\circ}\text{F} - 32) \leq 40$$

Paso 2

Se resuelve la desigualdad.

$$30 \leq \frac{5}{9} (^{\circ}\text{F} - 32) \leq 40$$

Se multiplican ambos términos de la desigualdad por  $\frac{9}{5}$

$$\frac{9}{5} 30 \leq ^{\circ}\text{F} - 32 \leq \frac{9}{5} 40$$

$$54 \leq ^{\circ}\text{F} - 32 \leq 72$$

Se suma 32 a ambos términos de la desigualdad.

$$54 + 32 \leq ^{\circ}\text{F} \leq 72 + 32$$

$$86 \leq ^{\circ}\text{F} \leq 104$$

La solución es en el intervalo de temperaturas entre  $86^{\circ}\text{F}$  y  $104^{\circ}\text{F}$ .

Ejercita tus conocimientos realizando el siguiente ejercicio.

De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza  $F$  (en libras) que se requiere para estirar un resorte más de su longitud natural está dada por la fórmula  $F = 4.5x$ . Si se trabaja en un intervalo de  $10 \leq F \leq 18$ , ¿cuál es el intervalo correspondiente a “ $x$ ”?

En el siguiente ejercicio encontraremos el área solución de la desigualdad  $2x - 5y + 7 \leq 0$ .

Paso 1

Para realizar la gráfica, el símbolo de desigualdad se cambia por el de igualdad, quedando la forma general de la recta.

$$2x - 5y + 7 = 0$$

Paso 2

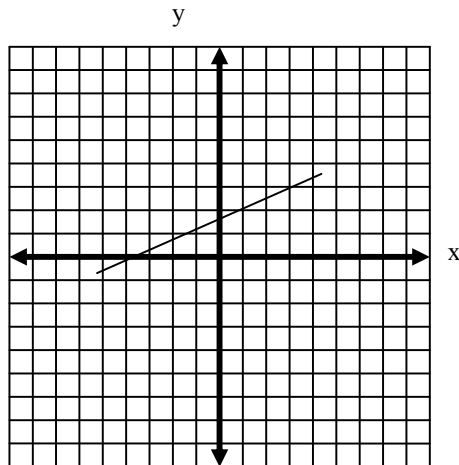
Se aplican las fórmulas para calcular las intersecciones con los ejes "x" y "y".

$$a = -\frac{C}{A} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

$$a = -\frac{7}{2} \qquad b = -\frac{7}{-5} = \frac{7}{5}$$

Paso 3

Los valores de a y b se localizan en el plano cartesiano y se traza la gráfica.



Paso 4

Se toma un punto abajo y arriba de la recta; por ejemplo, (-3, 3) y (0, 0), y se sustituye en la desigualdad.

Para (-3, 3)

$$2x - 5y + 7 \leq 0$$

$$2(-3) - 5(3) + 7 \leq 0$$

$$-6 - 15 + 7 \leq 0$$

$$-14 \leq 0$$

Para (0, 0)

$$2x - 5y + 7 \leq 0$$

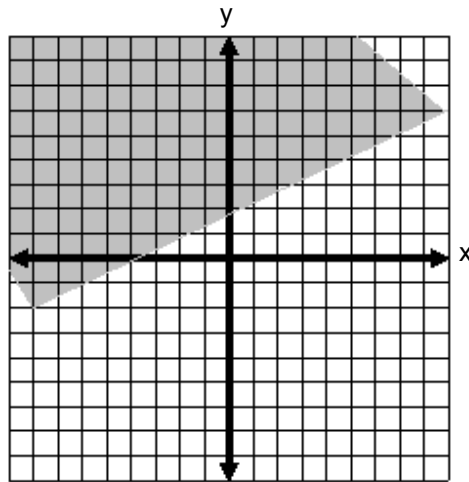
$$2(0) - 5(0) + 7 \leq 0$$

$$0 - 0 + 7 \leq 0$$

$$7 \leq 0$$

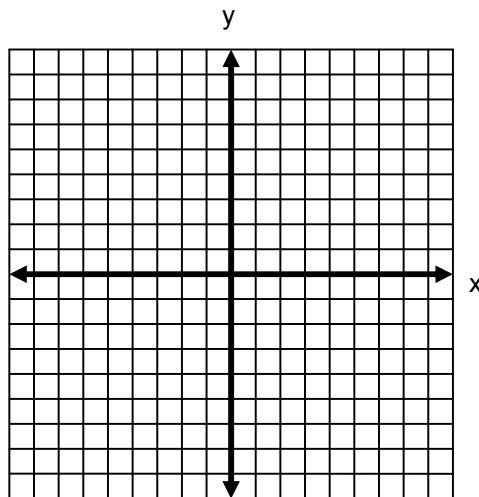
## Paso 5

El punto que cumple con la desigualdad es  $(-3, 3)$ ; por lo tanto, todos los puntos que están de ese lado dan solución a la desigualdad.



Ejercita tus conocimientos realizando el siguiente ejercicio.

Encuentra el área solución de la desigualdad  $4x + y - 5 \geq 0$ .



Observa el procedimiento para encontrar la solución del siguiente sistema de desigualdades.

$$3x - 5y < 8 \quad y \quad 5x + 4y + 3 > 0$$

Paso 1

El símbolo de desigualdad se cambia por el de igualdad, quedando la forma general de la recta.

$$3x - 5y - 8 = 0 \quad y \quad 5x + 4y + 3 = 0$$

Paso 2

Se aplican las fórmulas para calcular las intersecciones con los ejes "x" y "y".

Para la desigualdad  $3x - 5y - 8 = 0$ .

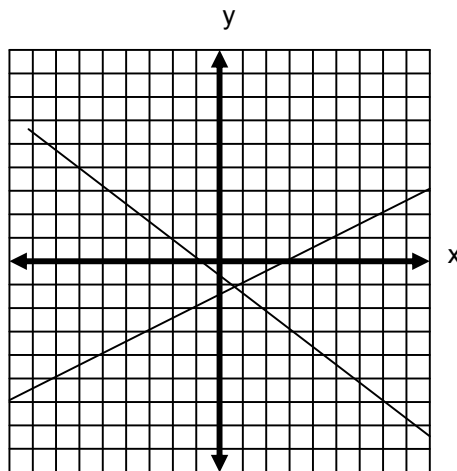
$$a = -\frac{C}{A} = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3} \quad b = -\frac{C}{B} = -\frac{-8}{-5} = -\frac{8}{5}$$

Para la desigualdad  $5x + 4y + 3 = 0$ .

$$a = -\frac{C}{A} = -\frac{3}{5} \quad b = -\frac{C}{B} = -\frac{3}{4}$$

Paso 3

Los puntos  $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$  y  $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$  para la primera desigualdad y los puntos  $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$  y  $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$  para la segunda desigualdad, se localizan en el plano cartesiano y se traza la gráfica.



Paso 4

Se toma un punto en cada una de las áreas que se formaron al trazar las gráficas de las rectas, por ejemplo (1, 1), (-3, -2), (2, -4) y (4, -1), y se sustituye en las desigualdades.

Para el punto (1, 1).

$$\begin{array}{ll} 3x - 5y < 8 & 5x + 4y + 3 > 0 \\ 3(1) - 5(1) < 8 & 5(1) + 4(1) + 3 > 0 \\ 3 - 5 < 8 & 5 + 4 + 3 > 0 \\ -2 < 8 & 12 > 0 \end{array}$$

Para el punto  $(-3, -2)$ .

$$\begin{aligned} 3x - 5y &< 8 \\ 3(-3) - 5(-2) &< 8 \\ -9 + 10 &< 8 \\ 1 &< 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 3 &> 0 \\ 5(-3) + 4(-2) + 3 &> 0 \\ -15 - 8 + 3 &> 0 \\ -20 &> 0 \end{aligned}$$

Para el punto  $(2, -4)$ .

$$\begin{aligned} 3x - 5y &< 8 \\ 3(2) - 5(-4) &< 8 \\ 6 + 20 &< 8 \\ 26 &< 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 3 &> 0 \\ 5(2) + 4(-4) + 3 &> 0 \\ 10 - 16 + 3 &> 0 \\ -3 &> 0 \end{aligned}$$

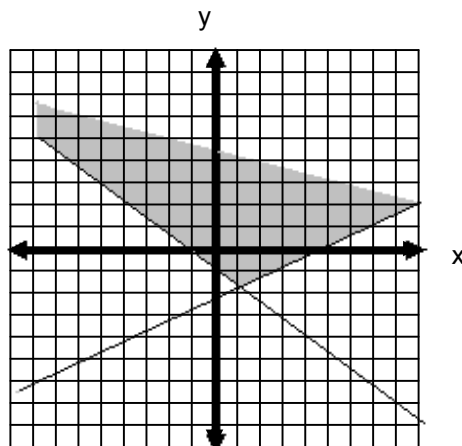
Para el punto  $(4, -1)$ .

$$\begin{aligned} 3x - 5y &< 8 \\ 3(4) - 5(-1) &< 8 \\ 12 + 5 &< 8 \\ 17 &< 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 3 &> 0 \\ 5(4) + 4(-1) + 3 &> 0 \\ 20 - 4 + 3 &> 0 \\ 19 &> 0 \end{aligned}$$

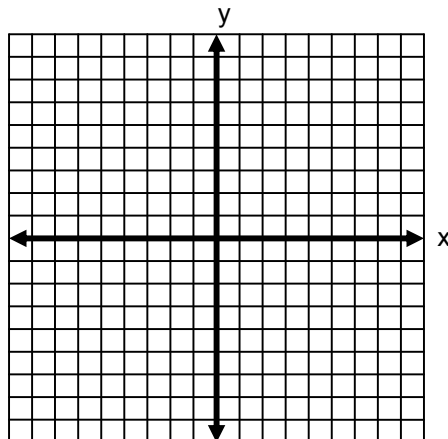
Paso 5

El punto que cumple con las desigualdades es  $(1, 1)$ , por lo tanto, todos los puntos que están en esta zona dan solución al sistema de desigualdades.



Ejercita tus conocimientos realizando el siguiente ejercicio.

Encuentra el conjunto solución del sistema de desigualdades  $2x + 3y - 7 \geq 0$  y  $x - 4y \leq 5$ .



**EJERCICIOS**

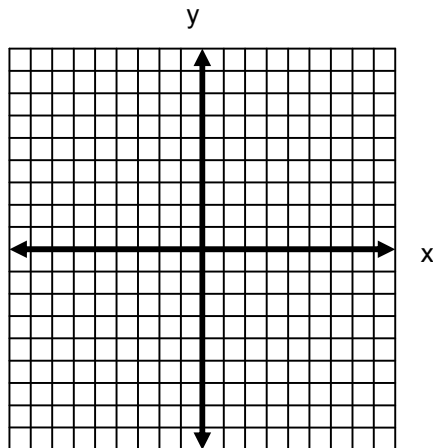
**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se te solicita.

1. Un pan de centeno tiene 10 calorías menos que el doble de las que contiene una rebanada de pan blanco, y en conjunto tienen un mínimo de 38 calorías. Encuentra el menor número posible de calorías por rebanada de pan blanco.

2. Se desea dibujar un triángulo que tenga dos ángulos iguales y que el tercero sea máximo  $12^\circ$  menor que el doble de la suma de los primeros. Encuentra el menor valor posible para los ángulos iguales.

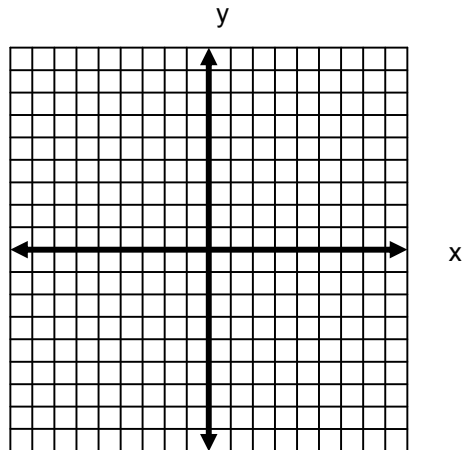
3. Un estudiante obtiene durante el año las siguientes calificaciones: 8.3, 9.0, 7.5 y 7.6. Para obtener una calificación final de 8 debe tener un promedio entre 7.5 y 8.4. Si sólo falta un examen, ¿cuál es el intervalo de calificaciones que debe obtener en el examen para tener un promedio de 8?

4. Señala en la gráfica el conjunto solución de la desigualdad  $3x - 5y - 7 < -2$ .

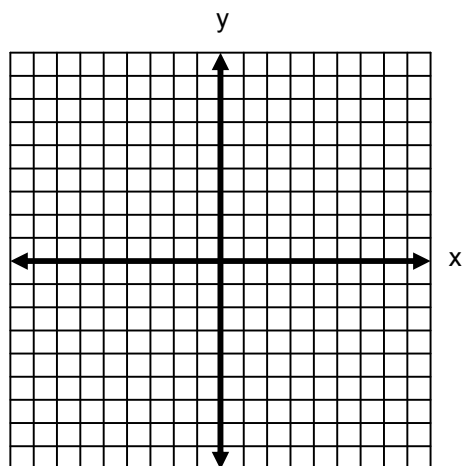




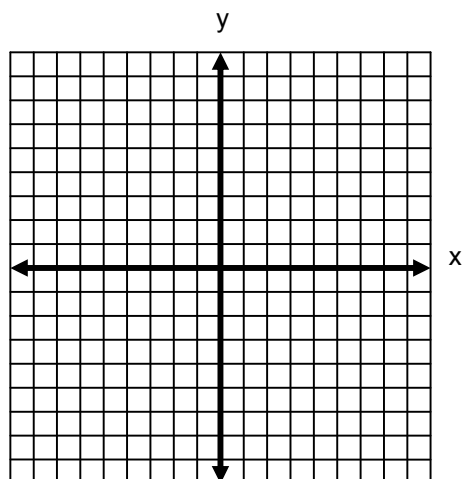
5. Señala en la gráfica el conjunto solución a la desigualdad  $x + 2y - 6 \leq 0$ .



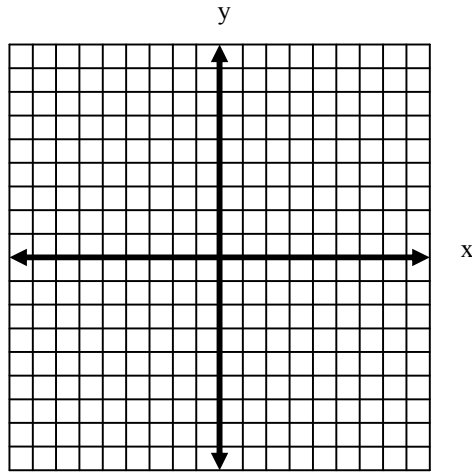
6. Señala en la gráfica la solución a la desigualdad  $2x - 5y + 2 \leq 0$ .



7. Señala en la gráfica la solución al sistema de desigualdades  $3x - 2y \leq -10$  y  $3x + 2y \leq -2$ .



8. Señala en la gráfica el conjunto solución al sistema de desigualdades  $2x - 5y \leq 4$  y  $x + 3y + y + 5 \geq 0$



9. Señala en la gráfica el conjunto solución al sistema de desigualdades  $4x - y \geq 1$  y  $3x + 5y \geq -5$ .

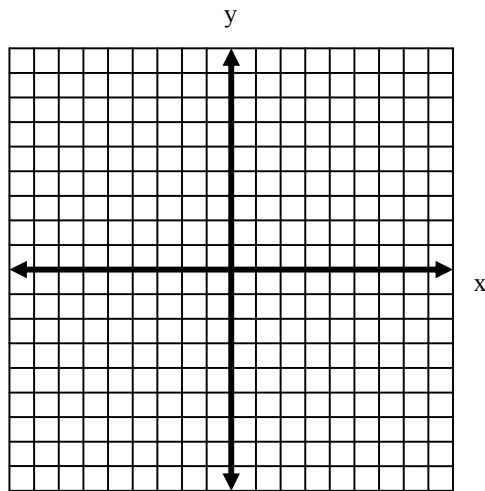
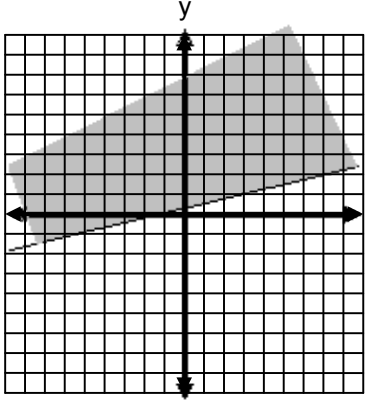
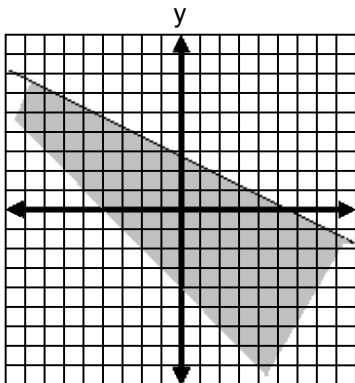
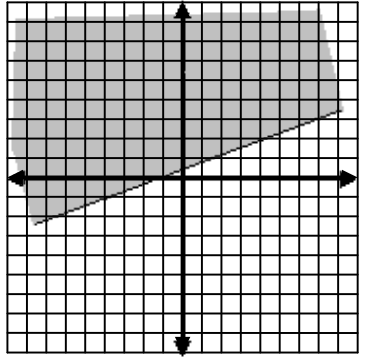
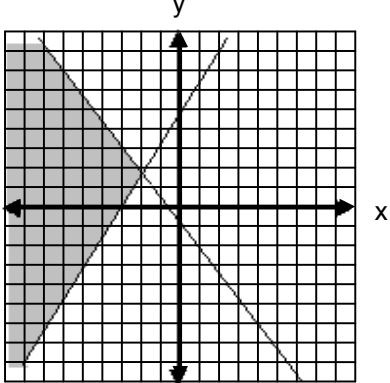
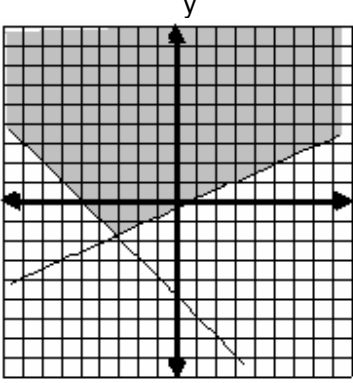
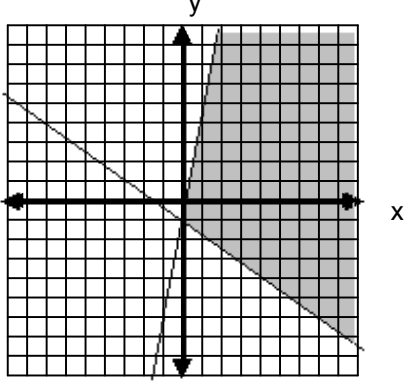


TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	$x \geq 16$
2	$x \leq 32^\circ$
3	$5.1 \leq x \leq 9.6$
4	
5	
6	

Número de pregunta	Respuesta correcta
7	 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A shaded region is bounded by the y-axis (x=0), the line y = -x, and the line y = x + 2. The region is shaded in gray.</p>
8	 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A shaded region is bounded by the lines y = x + 2, y = -x, and y = x - 2. The region is shaded in gray.</p>
9	 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A shaded region is bounded by the lines y = x + 2, y = -x, and the y-axis (x=0). The region is shaded in gray.</p>
<b>Sugerencias</b>	
<p>La suma de los ángulos interiores de un triángulo es <math>180^\circ</math>.          Para calcular las intersecciones con los ejes "x" y "y" las fórmulas tienen signo negativo.</p>	

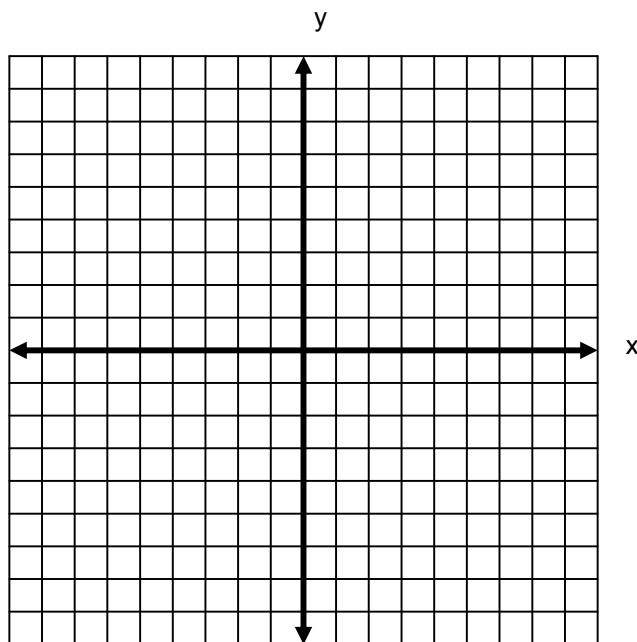
**AUTOEVALUACIÓN**

**Cuentas con 90 minutos para resolver los siguientes ejercicios.**

**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se te solicita.

1. Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano.

- A (-4, 5)      B (0, 6)      C (3, -2)      D (7, 0)      E (-8, -1)

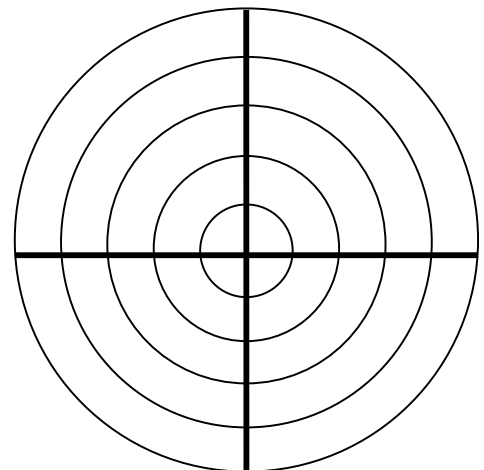


2. Analiza la siguiente función:  $r = \frac{4}{2 - \cos\theta}$ .

I. Completa la tabla.

$r$	$\theta$	$(r, \theta)$
	$0^\circ$	
	$30^\circ$	
	$45^\circ$	
	$60^\circ$	
	$90^\circ$	
	$120^\circ$	
	$135^\circ$	
	$150^\circ$	
	$180^\circ$	

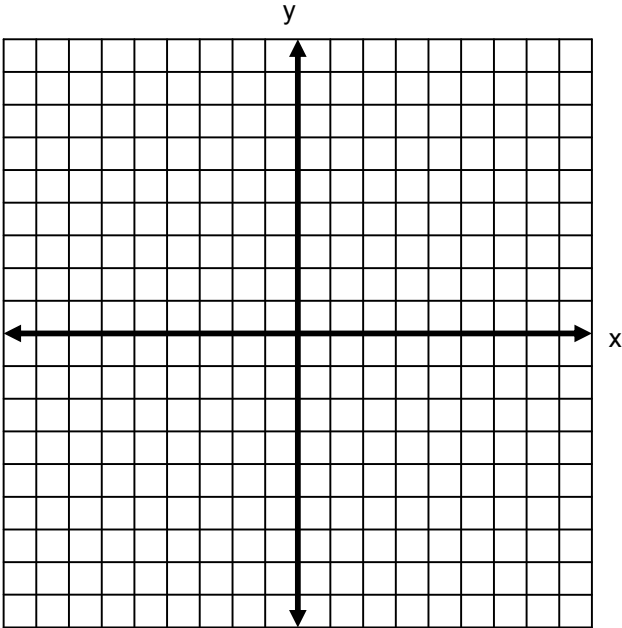
II. Grafica la función.



3. Sean los puntos M (3, -4) y N (-6, 2) los extremos de una recta.

I. Realiza la gráfica.

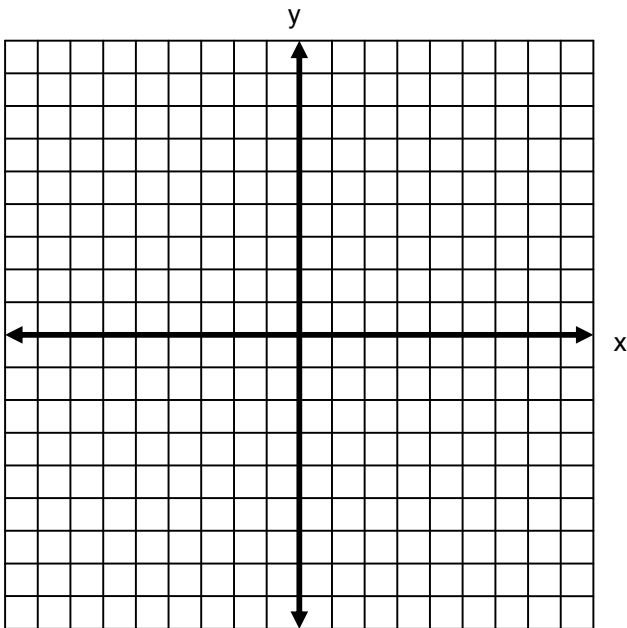
II. Calcula la distancia entre los puntos M y N.



4. Dados los puntos A(2, 5), B (8, -1) y C (-2, 1).

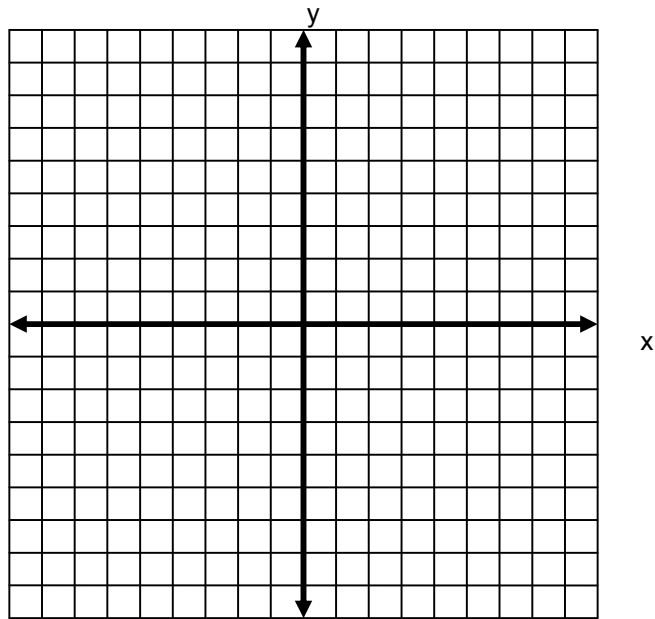
I. Realiza la gráfica.

II. Demuestra que son los vértices de un triángulo rectángulo (recuerda el teorema de Pitágoras).



5. Sean los extremos de la recta los puntos A (6, -5) y B (-2, 3).

I. Realiza la gráfica.



II. Calcula las coordenadas del punto que divide la recta en una razón  $r = \frac{3}{4}$ .

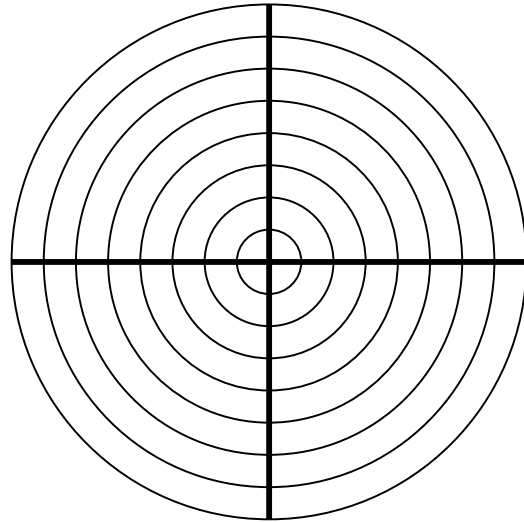
III. Calcula el punto medio.

6. Dadas las siguientes coordenadas rectangulares:

- a)  $(5, -4)$       b)  $(-3, 2)$       c)  $(6, 1)$

I. Transfórmalas a coordenadas polares.

II. Realiza la gráfica.

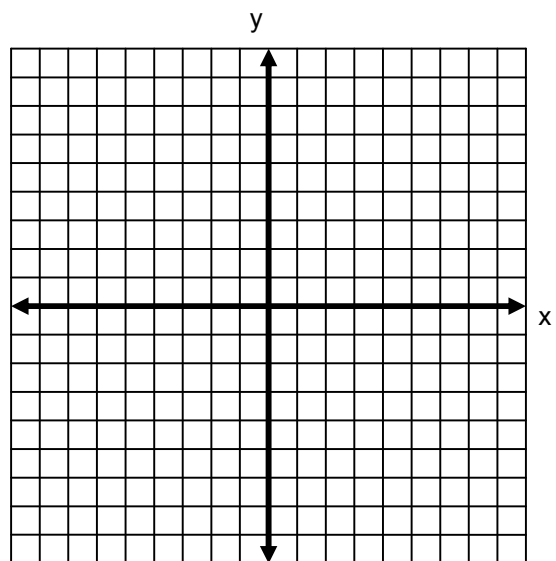


7. Las siguientes coordenadas polares:

- a)  $(3, 170^\circ)$       b)  $(4, 35^\circ)$       c)  $(6, 230^\circ)$

I. Transfórmalas a coordenadas rectangulares.

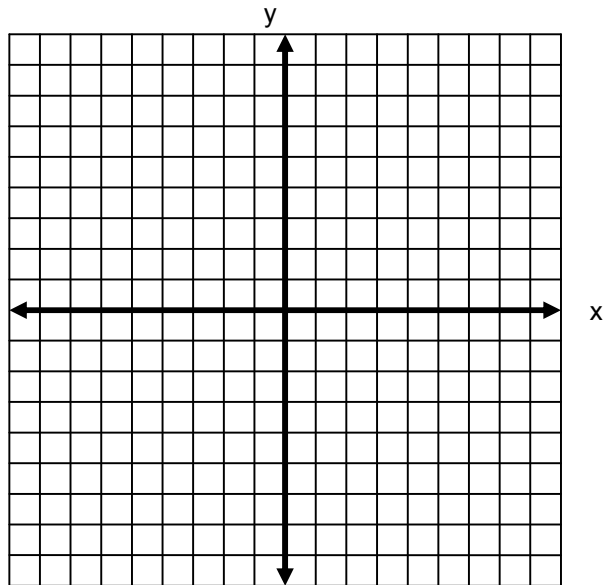
II. Realiza la gráfica.





8. Sean los puntos L (6, -2), M (2, 1) y N (-2, 4).

I. Realiza la gráfica.



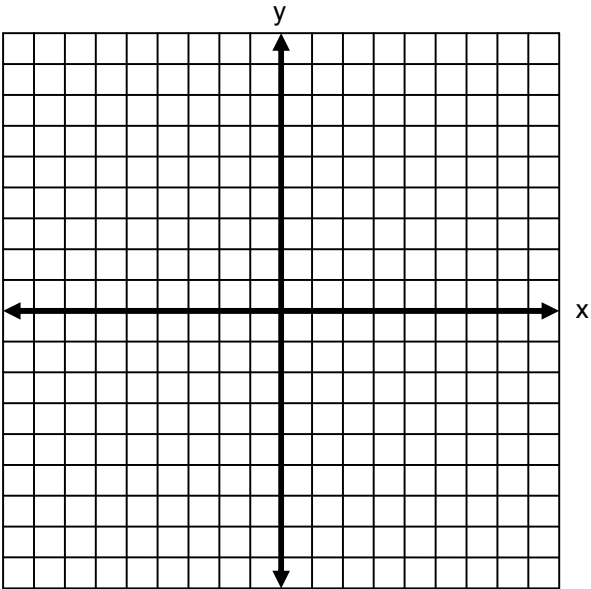
II. Por medio de pendientes comprueba si los puntos L, M y N son colineales.

III. Calcula el ángulo de inclinación de la pendiente de la recta.

9. Dados los puntos A (-2, -3), B (-1, 7) y C (4, 2).

I. Realiza la gráfica.

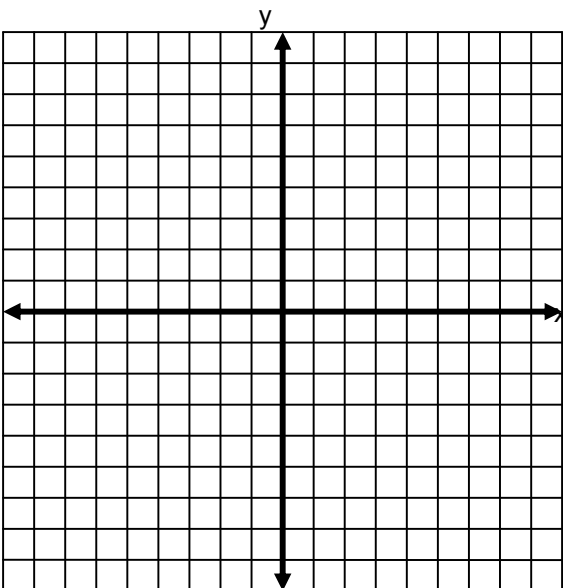
II. Calcula los ángulos interiores del triángulo ABC.



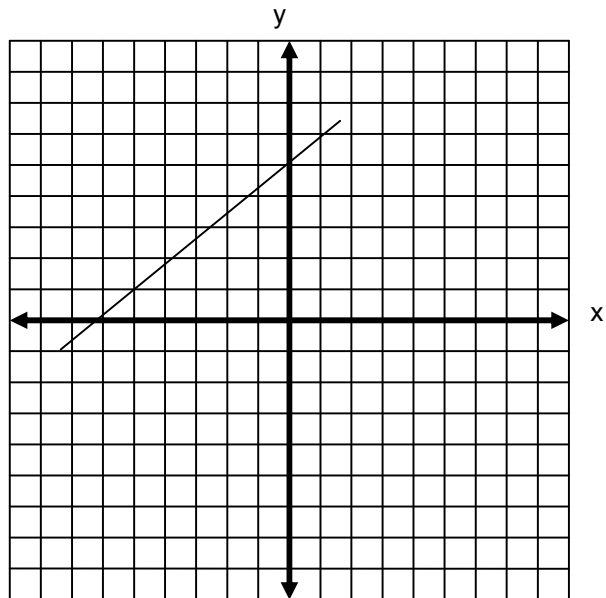
10. Dados los puntos T (-6, -3) y U (-2, 4).

I. Realiza la gráfica.

II. Obtén la ecuación de la recta en forma general que pasa por los puntos T y U.



11. Analiza la siguiente gráfica.



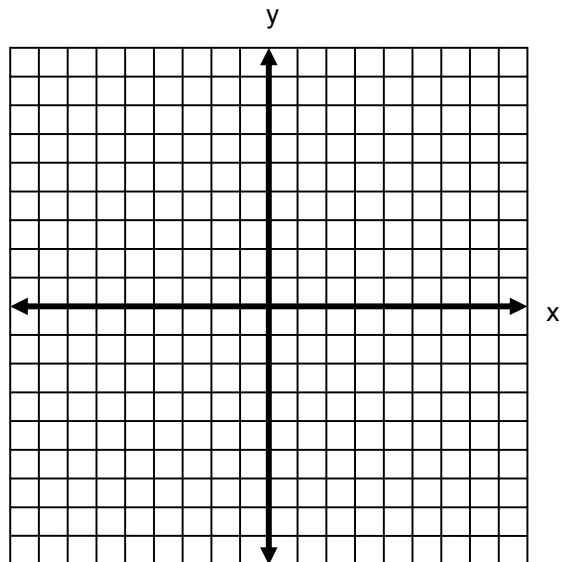
I. Encuentra la ecuación de la recta en forma simétrica.

II. Encuentra la ecuación general de la recta.

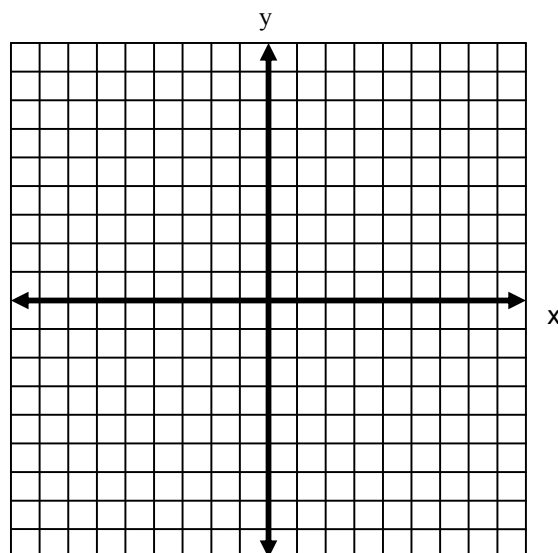
12. Sea la recta que pasa por el punto P (-5, -1) y es perpendicular a la recta  $2x - 5y - 4 = 0$ .

I. Encuentra la ecuación en forma general.

II. Realiza la gráfica.



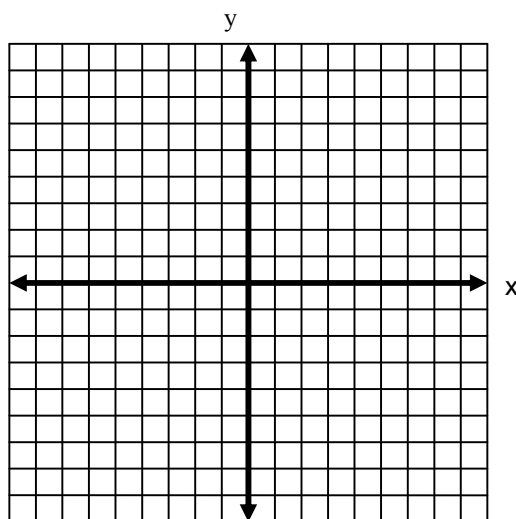
13. Construye la gráfica de la recta  $3x + 6y - 5 = 0$ .



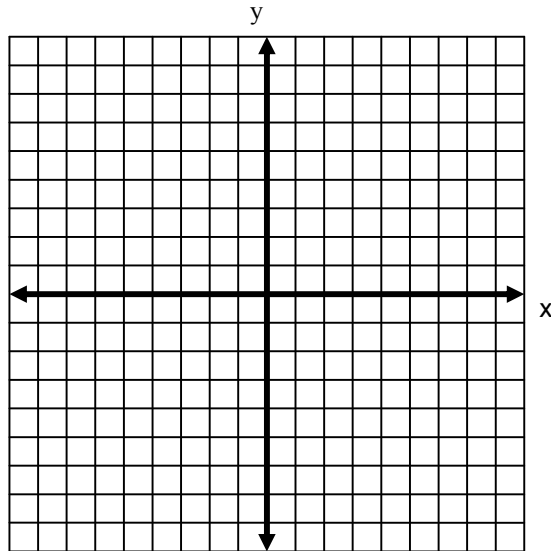
14. Encuentra la forma normal de la ecuación  $6x + 7y - 19 = 0$ .

15. Las puntuaciones obtenidas por una jugadora de boliche en cuatro juegos fueron 142, 136, 154 y 158.  
¿En qué intervalo debe estar la puntuación de su siguiente partido para que su promedio esté entre 150 y 165 puntos?

16. Señala en la gráfica el conjunto solución de la desigualdad  $7x - 4y \geq 6$ .

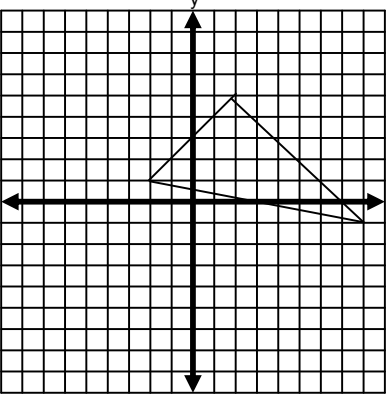
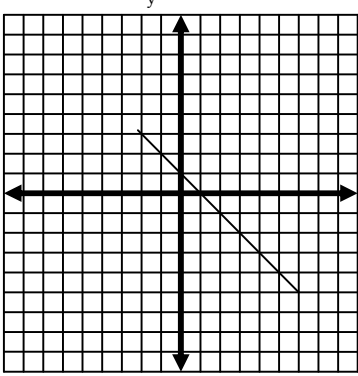
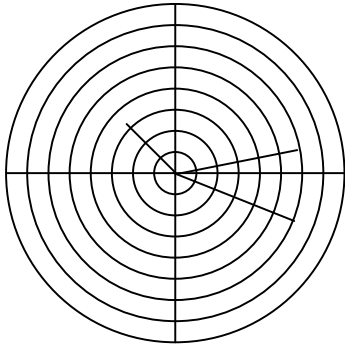


17. Señala en la gráfica el conjunto solución del sistema de desigualdades:  $5x - 2y \geq 1$  y  $4x + 7y \leq -8$ .

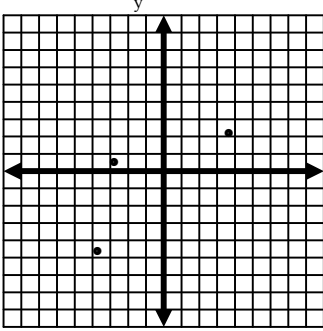
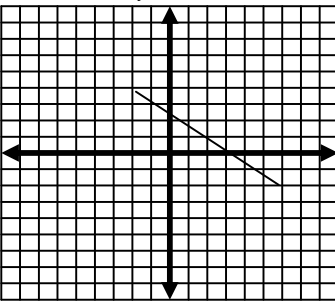
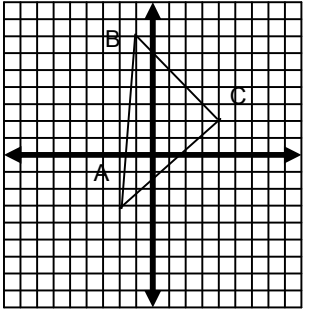


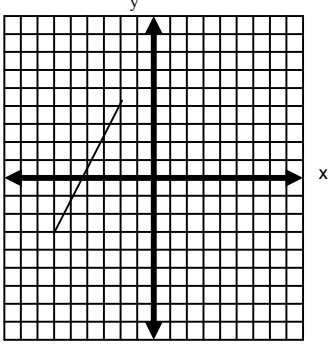
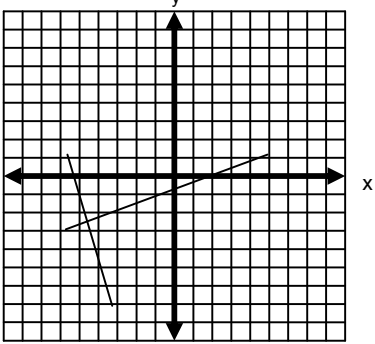
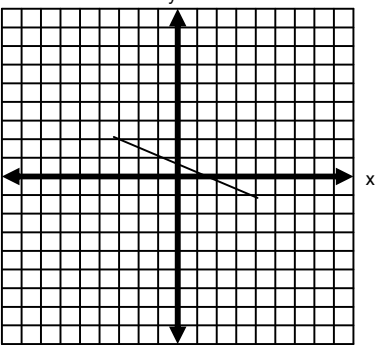
CLAVE DE RESPUESTAS

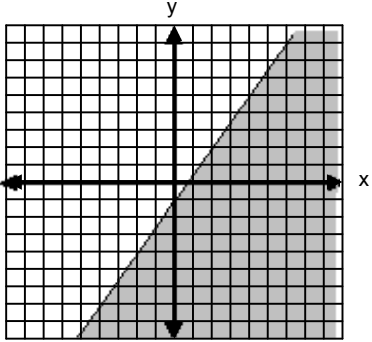
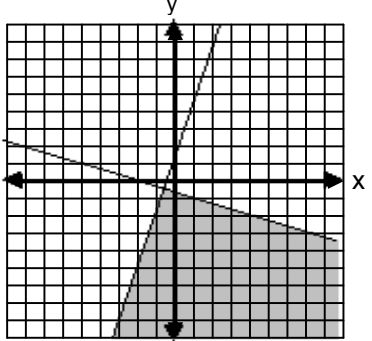
Número de pregunta	Respuesta correcta																														
1																															
2	<p>I.</p> <table border="1" data-bbox="758 918 1184 1214"> <thead> <tr> <th>r</th> <th><math>\theta</math></th> <th><math>(r, \theta)</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td><math>0^\circ</math></td> <td><math>(4, 0^\circ)</math></td> </tr> <tr> <td>3.5</td> <td><math>30^\circ</math></td> <td><math>(3.5, 30^\circ)</math></td> </tr> <tr> <td>3.1</td> <td><math>45^\circ</math></td> <td><math>(3.1, 45^\circ)</math></td> </tr> <tr> <td>2.6</td> <td><math>60^\circ</math></td> <td><math>(2.6, 60^\circ)</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>90^\circ</math></td> <td><math>(2, 90^\circ)</math></td> </tr> <tr> <td>1.6</td> <td><math>120^\circ</math></td> <td><math>(1.6, 120^\circ)</math></td> </tr> <tr> <td>1.5</td> <td><math>135^\circ</math></td> <td><math>(1.5, 135^\circ)</math></td> </tr> <tr> <td>1.4</td> <td><math>150^\circ</math></td> <td><math>(1.4, 150^\circ)</math></td> </tr> <tr> <td>1.3</td> <td><math>180^\circ</math></td> <td><math>(1.3, 180^\circ)</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>II.</p>	r	$\theta$	$(r, \theta)$	4	$0^\circ$	$(4, 0^\circ)$	3.5	$30^\circ$	$(3.5, 30^\circ)$	3.1	$45^\circ$	$(3.1, 45^\circ)$	2.6	$60^\circ$	$(2.6, 60^\circ)$	2	$90^\circ$	$(2, 90^\circ)$	1.6	$120^\circ$	$(1.6, 120^\circ)$	1.5	$135^\circ$	$(1.5, 135^\circ)$	1.4	$150^\circ$	$(1.4, 150^\circ)$	1.3	$180^\circ$	$(1.3, 180^\circ)$
r	$\theta$	$(r, \theta)$																													
4	$0^\circ$	$(4, 0^\circ)$																													
3.5	$30^\circ$	$(3.5, 30^\circ)$																													
3.1	$45^\circ$	$(3.1, 45^\circ)$																													
2.6	$60^\circ$	$(2.6, 60^\circ)$																													
2	$90^\circ$	$(2, 90^\circ)$																													
1.6	$120^\circ$	$(1.6, 120^\circ)$																													
1.5	$135^\circ$	$(1.5, 135^\circ)$																													
1.4	$150^\circ$	$(1.4, 150^\circ)$																													
1.3	$180^\circ$	$(1.3, 180^\circ)$																													
3	<p>I.</p> <p>II. <math>d = 10.8</math></p>																														

Número de pregunta	Respuesta
4	<p>I. </p> <p>II.</p> <p><math>d_{AB} = \sqrt{72}</math>; <math>d_{BC} = \sqrt{104}</math>; <math>d_{CA} = \sqrt{32}</math></p> <p>Sí, se trata de un triángulo rectángulo.</p>
5	<p>I. </p> <p>II. <math>P_r\left(\frac{18}{7}, -\frac{11}{7}\right)</math></p> <p>III. <math>P_m(2, -1)</math></p>
6	<p>I. a) (6.4, 321.3°); b) (3.6, 146.3°); c) (6.1, 9.5°)</p> <p>II. </p>



Número de pregunta	Respuesta
7	<p>I. a) (-3.0, 0.5)                      b) (3.3, 2.3)                      c) (-3.9, -4.6)</p> <p>II.</p> 
8	<p>I.</p>  <p>II. <math>m_{LM} = -\frac{3}{4}</math>; <math>m_{MN} = -\frac{3}{4}</math></p> <p>Son colineales por tener pendientes iguales.</p> <p>III. <math>\theta = 143.1^\circ</math></p>
9	<p>I.</p>  <p>II. <math>\alpha = 44.5^\circ</math>; <math>\beta = 50.7^\circ</math>; <math>\gamma = 84.4^\circ</math></p>

Número de pregunta	Respuesta
10	<p>I.</p>  <p>II. <math>7x - 4y + 30 = 0</math></p>
11	<p>I. <math>\frac{x}{-6} + \frac{y}{5} = 1</math></p> <p>II. <math>5x - 6y + 30 = 0</math></p>
12	<p>I. <math>5x + 2y + 27 = 0</math></p> <p>II.</p> 
13	

Número de pregunta	Respuesta
14	$\frac{6}{\sqrt{85}}x + \frac{7}{\sqrt{85}}y - \frac{19}{\sqrt{85}} = 0$ $0.65x + 0.76y - 2.06 = 0$ $x \cos 49.4^\circ + y \sin 49.4^\circ - 2.06 = 0$
15	$160 \leq x \leq 235$
16	
17	



## **UNIDAD 2**

# **CÓNICAS: UN CASO GENERAL**



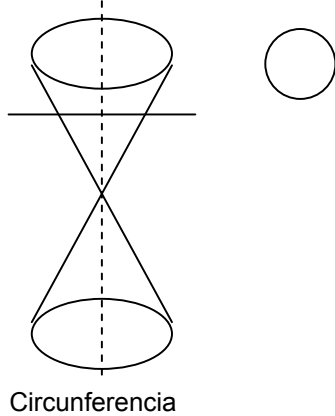
2.1 Explorando las cónicas.

**Aprendizajes**

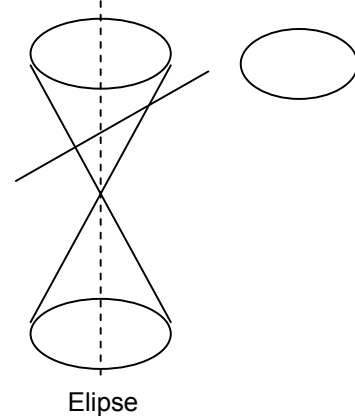
- Identificar las curvas cónicas en los cortes seccionales de un cono.

Las curvas cónicas son las figuras geométricas que se obtienen al cortar un cono de dos mantos. Ahora bien, de acuerdo con la posición del corte con respecto al eje de simetría, se pueden obtener las siguientes figuras cónicas.

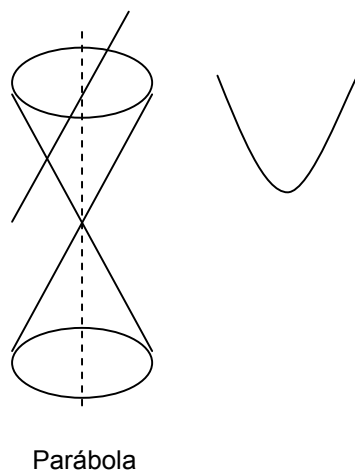
Perpendicular al eje de simetría



Inclinado al eje de simetría



Paralela al eje generatriz



Paralelo al eje de simetría

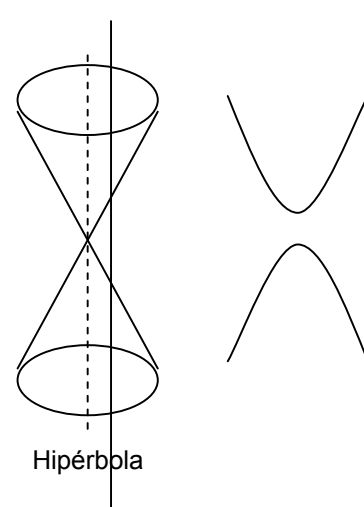


Figura 1

La **circunferencia** es la cónica mas simple; para trazarla debes marcar el **centro** (punto fijo **C**), abrir el compás hasta la medida del **radio** (**r**) deseado y; haciendo centro en el punto fijo, se traza un arco cerrado.

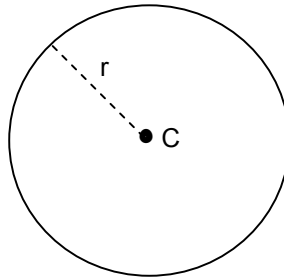


Figura 2

La circunferencia es un caso especial de la elipse, que se obtiene cuando ambos focos van juntándose hasta coincidir en un punto, en este caso el centro de la circunferencia.

La **parábola se forma a partir de un punto fijo llamado foco (F) y una recta fija llamada directriz (D)**. Para construir la parábola se traza una directriz y el foco; después, a la mitad de la distancia entre ambos, se marca el vértice (V). A continuación, para determinar la abertura de la parábola, se dibuja una perpendicular al foco cuya distancia sea el doble de la distancia del foco a la directriz. Por ultimo se traza un arco que pase exactamente por el vértice y los extremos de la perpendicular dibujada anteriormente.

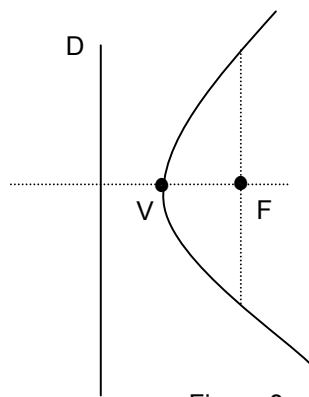


Figura 3

Para formar la **elipse** se ubica el **centro (C)**, se localizan los **focos (F)** y los **vértices (V)**. Con una cuerda cuya longitud sea igual a la distancia entre los vértices y apoyándose en los focos se traza la elipse.

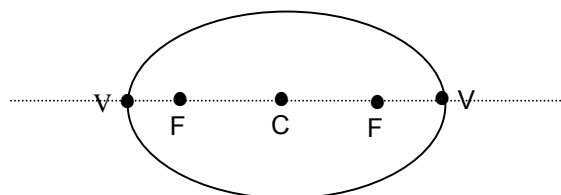


Figura 4



La **hipérbola** tiene dos ramas simétricas. Se construye localizando el **centro (C)** y posteriormente los **vértices (V)**. Los **focos (F)** se sitúan de modo que la distancia del foco al centro sea mayor que la distancia del centro al vértice. Se trazan los arcos haciendo centro en los focos y cuidando que cumplan con la condición de pasar por los vértices.

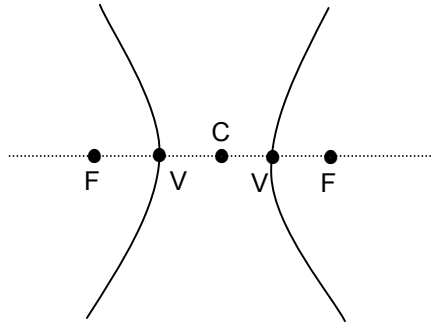
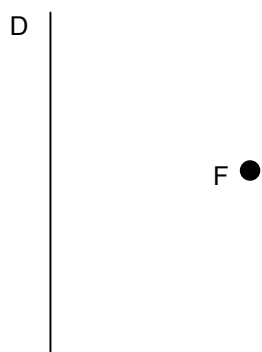


Figura 5

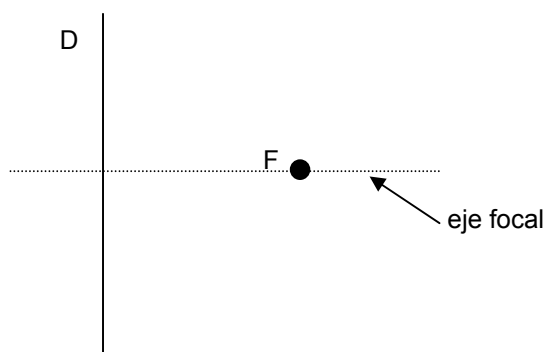
**APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO**

Observa cómo se realiza la gráfica de la parábola.

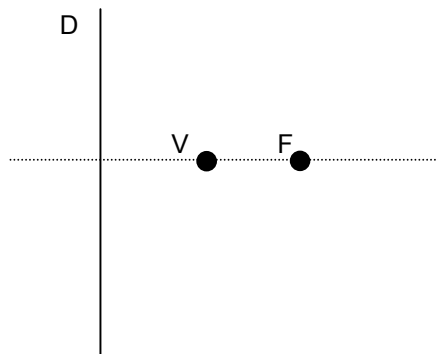
Primero traza la recta fija directriz D y el punto fijo F.



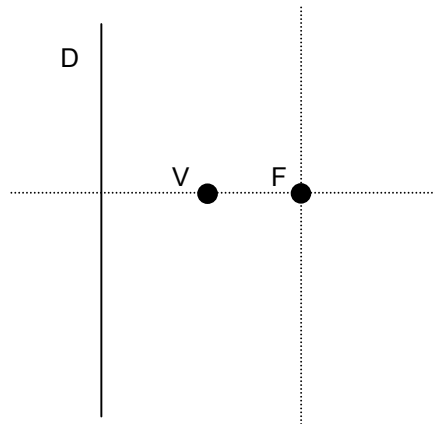
Traza la recta perpendicular a la directriz, llamada eje focal.



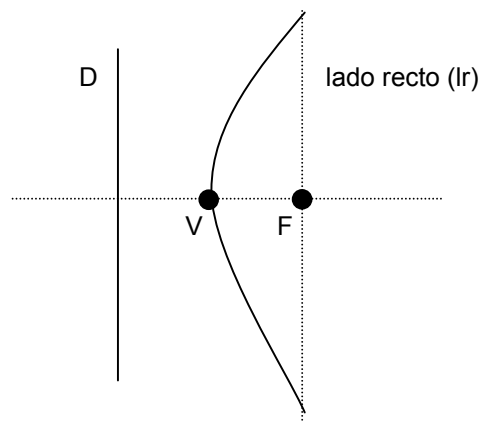
Mide la distancia entre la directriz y el punto F y, exactamente a la mitad, localiza el vértice V.



Apoyándote en el foco traza una perpendicular que mida el doble de la distancia del foco a la directriz; esta perpendicular determina la abertura de la parábola.



Apoyándote en el foco se traza una curva que pase exactamente por el vértice y toque los extremos de la perpendicular que se trazó.



Ejercita tus conocimientos realizando la gráfica de la elipse.

**EJERCICIOS**

---

**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita.

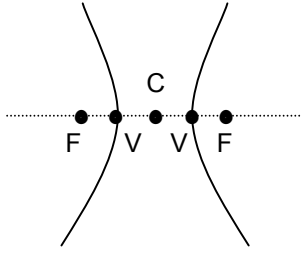
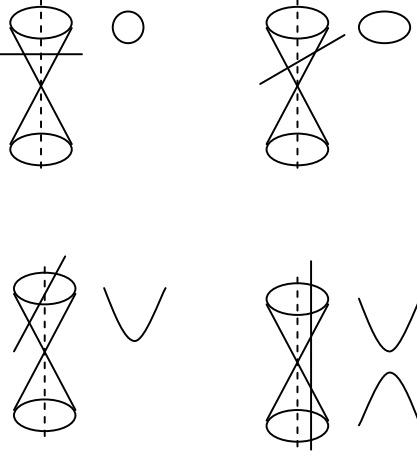
1. Relaciona ambas columnas, anotando en el paréntesis de la izquierda la letra de la columna derecha que le corresponda.

- |   |                    |
|---|--------------------|
| (        ) Figura que se forma al cortar el cono en forma paralela al eje de simetría.      | A) Hipérbola.      |
| (        ) Figura que se forma al cortar el cono en forma inclinada al eje de simetría.     | B) Parábola.       |
| (        ) Figura que se forma al cortar el cono en forma perpendicular al eje de simetría. | C) Recta.          |
| (        ) Figura que se forma al cortar el cono en forma paralela al eje generatriz.       | D) Circunferencia. |
|   | E) Elipse.         |

2. Traza la gráfica de la hipérbola.

3. Con conos de unicel realiza los cortes de acuerdo con el eje de simetría y dibuja las cónicas resultantes.

**TABLA DE COMPROBACIÓN**

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	<p style="text-align: center;">A E D B</p>
2	 <p style="text-align: center;">A diagram of a hyperbola opening horizontally. The vertices are labeled 'V' and the foci are labeled 'F'. A point 'C' is marked on the horizontal axis between the two vertices.</p>
3	 <p style="text-align: center;">A collection of four diagrams. The top row shows a cone with a horizontal cross-section resulting in a circle, and a cone with a diagonal cross-section resulting in an ellipse. The bottom row shows a cone with a diagonal cross-section resulting in a parabola, and a cone with a vertical cross-section resulting in two intersecting lines.</p>
<b>Sugerencias</b>	
<p>Asegúrate de realizar tus gráficas de acuerdo con la definición de cada cónica.</p>	

## 2.2 Modelos algebraicos de la circunferencia y la parábola

### Aprendizajes

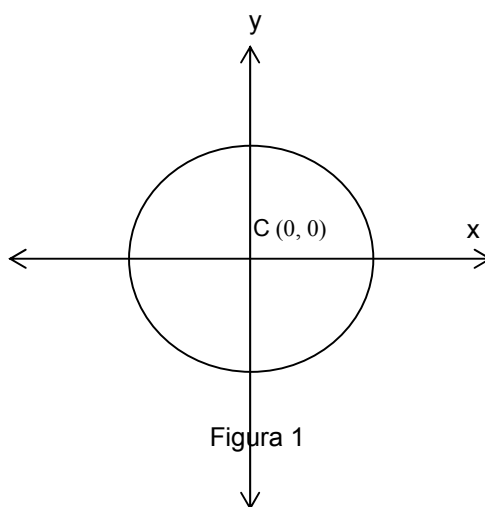
- Deducir la ecuación de la circunferencia a partir de condiciones de centro y radio.
- Deducir la ecuación de la circunferencia a partir de su gráfica.
- Calcular el centro y radio de una circunferencia a partir de su forma general.
- Deducir la ecuación de la parábola a partir de las condiciones de vértice y foco.
- Encontrar el vértice y foco de la parábola a partir de su forma general.
- Deducir la ecuación de la parábola a partir de su gráfica.

#### Circunferencia:

La **circunferencia** se define como el lugar geométrico de **todos los puntos cuya distancia a un punto fijo es constante**. Al punto fijo se le llama **centro** y a la distancia constante se le llama **radio**.

Existen dos casos respecto a la ubicación de la circunferencia en el plano: **con centro en el origen y con centro fuera del origen**. Esto determina el modelo algebraico de la circunferencia según sea el caso.

Si el centro de la circunferencia se encuentra en el origen del plano cartesiano, sus coordenadas son  $C(0, 0)$  y la ecuación es  $x^2 + y^2 = r^2$ , como se ve en la siguiente figura.



Si el centro de la circunferencia se encuentra fuera del origen del plano cartesiano, sus coordenadas serán  $C(h, k)$  y tomando un punto cualquiera de la circunferencia de coordenadas  $(x, y)$ .

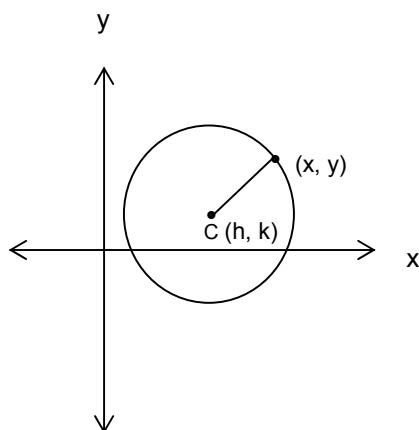


Figura 2

De acuerdo con la definición de la circunferencia y con base en la fórmula de distancia entre dos puntos la ecuación será:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Al desarrollar los binomios al cuadrado obtenidos se encuentra la ecuación de la circunferencia en forma general.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dada la ecuación de la circunferencia en la forma general, se pueden obtener el centro y radio de la misma con las fórmulas:

$$h = -\frac{D}{2} \qquad k = -\frac{E}{2} \qquad r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

Donde: **h** = abscisa del centro de la circunferencia.

**k** = ordenada del centro de la circunferencia.

Si la **raíz es positiva** se trata de una **circunferencia**.

Si la **raíz es negativa** se trata de un **conjunto vacío**.

Si la **raíz es cero** se trata de un **punto**.



### Parábola

La **parábola** se define como **el lugar geométrico formado por los puntos que equidistan de una recta fija y de un punto fijo**. Al punto fijo se le llama **foco** y a la recta fija se le llama **directriz**.

La parábola puede ser horizontal hacia la izquierda o derecha y vertical hacia arriba o abajo.

Igual que para la circunferencia, las coordenadas del vértice de la parábola con centro en el origen son  $V(0, 0)$ .

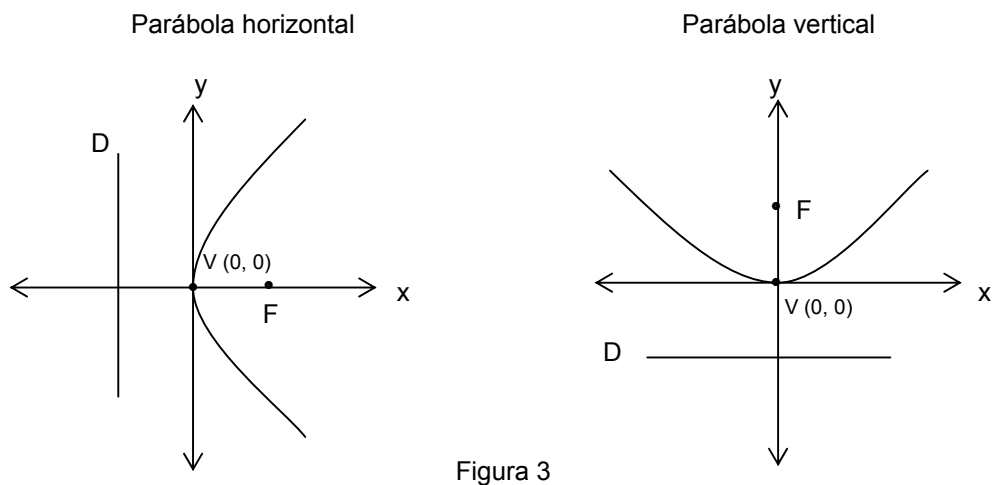


Figura 3

Las coordenadas del vértice cuando se encuentran fuera del origen son  $V(h, k)$ . Figura 4.

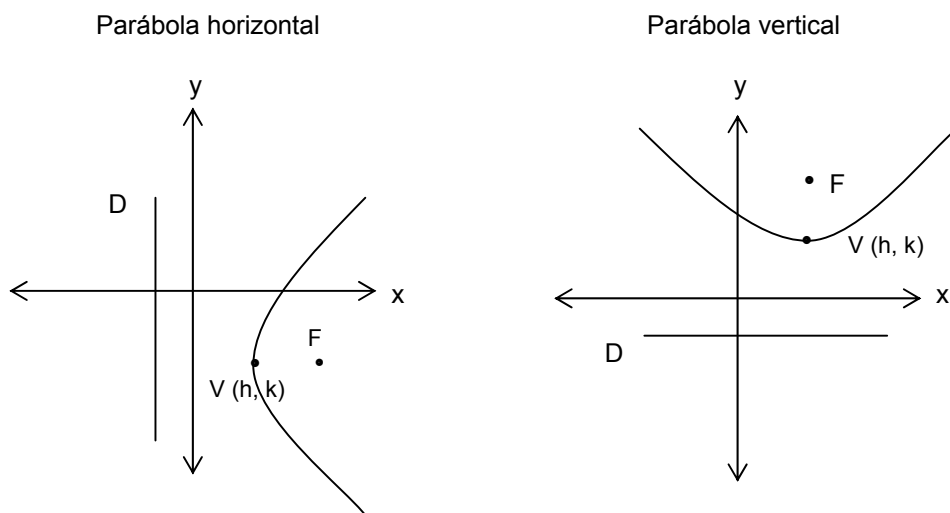


Figura 4

Fórmulas de la parábola

	Con vértice en el origen	Con vértice fuera del origen
Parábola horizontal	$V(0, 0)$ $F(p, 0)$ Directriz: $x = -p$ $lr =  4p $ $y^2 = 4px$	$V(h, k)$ $F(h + p, k)$ Directriz: $x = h - p$ $lr =  4p $ $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Parábola vertical	$V(0, 0)$ $F(0, p)$ Directriz: $y = -p$ $lr =  4p $ $x^2 = 4py$	$V(h, k)$ $F(h, k + p)$ Directriz: $y = k - p$ $lr =  4p $ $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Donde:	$V$ = vértice de la parábola. $F$ = foco de la parábola. $p$ = distancia del vértice al foco. $lr$ = lado recto.	

Al desarrollar los binomios al cuadrado se encuentra la ecuación general.

Parábola horizontal	Parábola vertical
$y^2 + Dx + Ey + F = 0$	$x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Dada la ecuación de la parábola en la forma general, se pueden obtener el vértice, foco y directriz de la misma con las siguientes fórmulas:

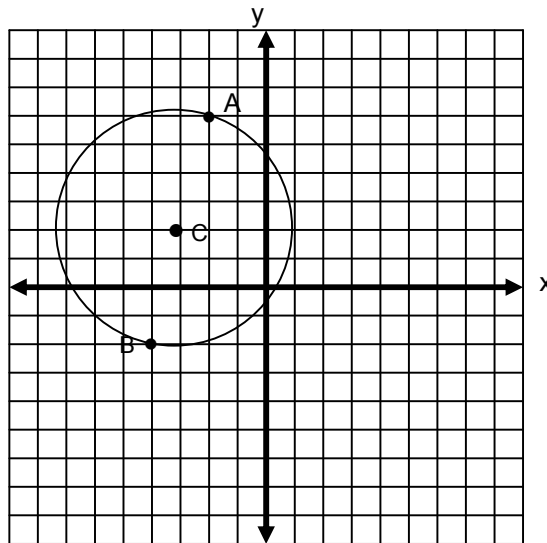
Parábola horizontal	Parábola vertical
$p = -\frac{D}{4}$ $k = -\frac{E}{2}$ $h = \frac{F - k^2}{4p}$	$h = -\frac{D}{2}$ $p = -\frac{E}{4}$ $k = \frac{F - h^2}{4p}$
Donde: $h$ = abscisa del vértice. $k$ = ordenada del vértice. $p$ = distancia del vértice al foco.	

**APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO**

Observa con cuidado cómo se encuentra la ecuación en forma general de la circunferencia cuyos extremos del diámetro son los puntos A (-2, 6) y B (-4, -2).

Paso 1

Se localizan los puntos en el plano cartesiano y se traza la circunferencia.



Paso 2

Se calcula el punto medio entre los puntos A y B.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

La coordenada del centro es C (-3, 2)

Paso 3

Se calcula la distancia entre el centro C (-3, 2) y el punto A (-2, 6)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3 + 2)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

El radio de la circunferencia es:

$$r = \sqrt{17}$$

Paso 4

De la ecuación :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Se sustituyen los datos de radio y centro de la circunferencia para encontrar la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria.

$$\begin{aligned} (x - (-3))^2 + (y - 2)^2 &= (\sqrt{17})^2 \\ (x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 17 \end{aligned}$$

Paso 5

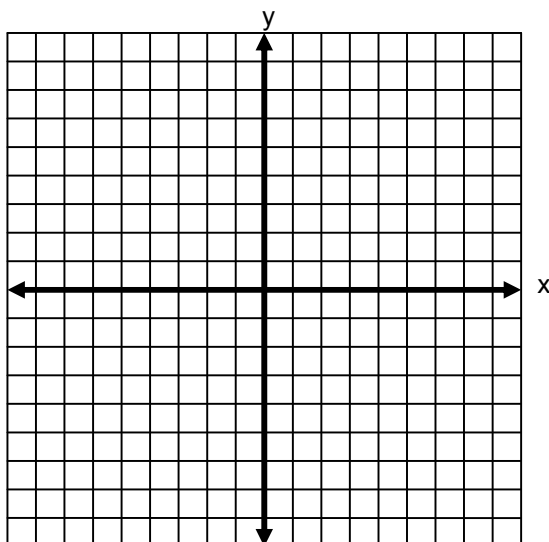
Se desarrollan los binomios al cuadrado y se suman términos semejantes para encontrar la ecuación de la circunferencia en forma general:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 17$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 17 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$$

Ejercita tus conocimientos y obtén la ecuación de la circunferencia con centro en  $C ( 4 , 1 )$  y tangente a la recta  $3x - 2y + 6 = 0$ . Para calcular el radio de la circunferencia tienes que calcular la distancia del centro a la recta.



A continuación, a partir de la fórmula general  $2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y - 46 = 0$  encontraremos el centro y radio de la circunferencia, así como la gráfica.

**Paso 1**

Se divide la ecuación general entre el coeficiente de los términos cuadráticos.

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} + \frac{12x}{2} - \frac{8y}{2} - \frac{46}{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$$

**Paso 2**

Se aplican las fórmulas para obtener el centro y el radio:

$$h = -\frac{D}{2} \quad k = -\frac{E}{2} \quad r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

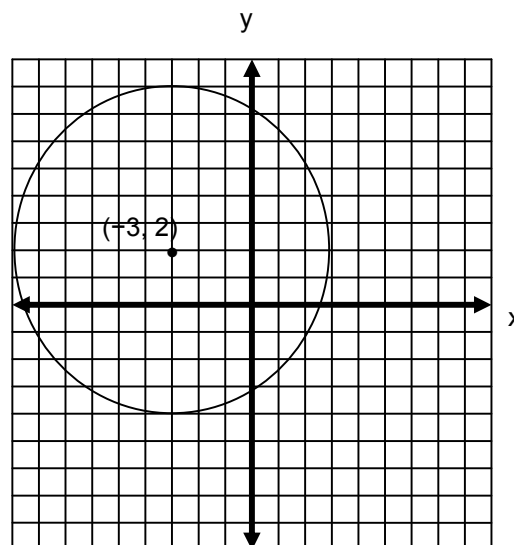
$$h = -\frac{D}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \quad k = -\frac{E}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \sqrt{\frac{6^2 + (-4)^2 - 4(-23)}{4}} = \sqrt{\frac{36 + 16 + 92}{4}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = \sqrt{36} = 6$$

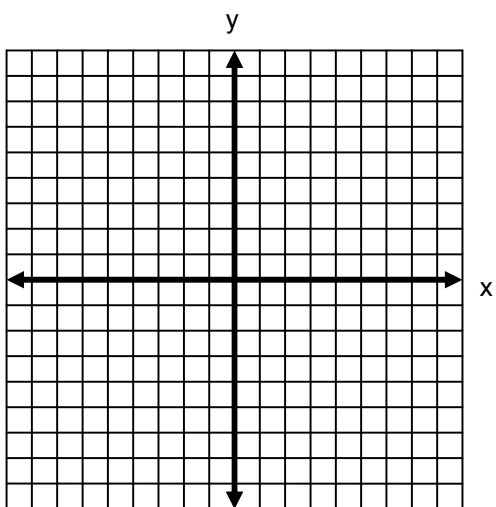
Por lo tanto, el centro de la circunferencia es  $C(-3, 2)$  y radio  $r = 6$ .

**Paso 3**

Con los datos anteriores se grafica la circunferencia.



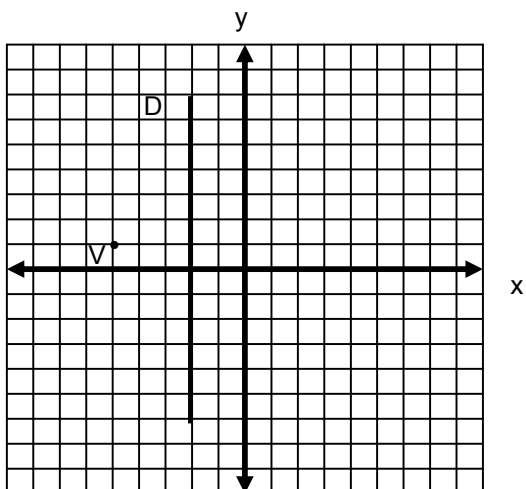
Ahora, encuentra el centro y radio de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ . Además realiza su gráfica.



En seguida encontraremos la gráfica y la ecuación de la parábola en forma general con vértice en  $(-5, 1)$  y directriz  $x = -2$

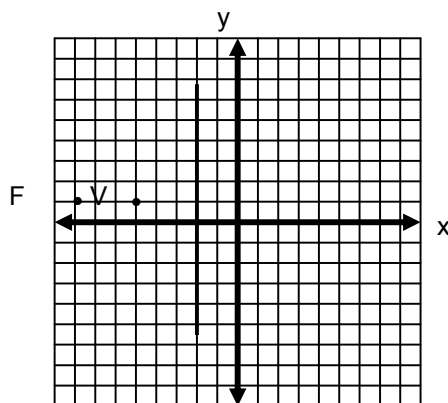
Paso 1

Con los datos del vértice y la directriz se localizan los puntos en el plano cartesiano.



## Paso 2

De la gráfica se obtiene el valor de  $p$ , distancia del vértice a la directriz y se localiza el foco  $F$  de la parábola.



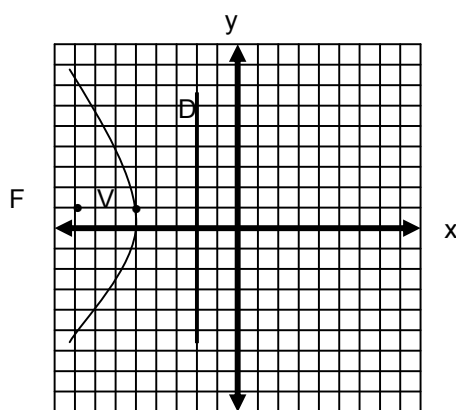
+

La distancia del foco al vértice es  $p = -3$  y la coordenada del foco es  $F(-8, 1)$ . El signo negativo de  $p$  indica que abre a la izquierda.

## Paso 3

Se calcula el lado recto de la parábola y se termina la gráfica.

$$lr = |4p| = |4(-3)| = |-12| = 12$$



## Paso 4

Se sustituyen los datos del vértice y foco para obtener la ecuación de la parábola en forma ordinaria.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$(y - 1)^2 = 4(-3)(x - (-5))$$

$$(y - 1)^2 = -12(x + 5)$$

Paso 5

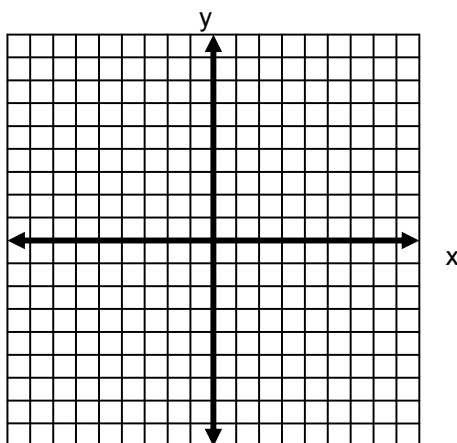
Se desarrolla la ecuación para obtener la forma general de la parábola.

$$(y - 1)^2 = -12(x + 5)$$

$$y^2 - 2y + 1 = -12x - 60$$

$$y^2 + 12x - 2y + 61 = 0$$

Ejercita tus conocimientos y obtén la gráfica y la ecuación de la parábola con vértice en V (4, 5) y foco en F (4, 3).



A continuación obtendremos, a partir de la fórmula general, todos los elementos de la parábola  $x^2 - 12x - 4y + 8 = 0$ , así como su gráfica.

Paso 1

Observa el término cuadrático. Si es  $x^2$  la parábola es vertical, si se trata de  $y^2$  la parábola es horizontal. En este caso el término cuadrático es  $x$ ; por lo tanto, utilizaremos las fórmulas:

$$h = -\frac{D}{2} \qquad p = -\frac{E}{4} \qquad k = \frac{F - h^2}{4p}$$

Para calcular la coordenada del vértice y el valor de  $p$ .

$$h = -\frac{D}{2} = -\frac{-12}{2} = 6 \qquad p = -\frac{E}{4} = -\frac{-4}{4} = 1$$

$$k = \frac{F - h^2}{4p} = \frac{8 - 6^2}{4(1)} = \frac{8 - 36}{4} = \frac{-28}{4} = -7$$



La coordenada del vértice es  $V(6, -7)$  y la distancia del vértice al foco es  $p = 1$

Paso 2

Se calcula la ecuación de la directriz y el lado recto con las fórmulas:

$$F(h, k + p) = F(6, -7 + 1) = F(6, -6)$$

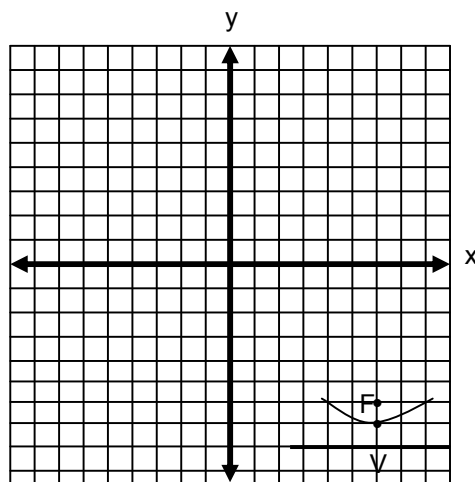
$$lr = |4p| = |4(1)| = 4$$

$$y = k - p = -7 - 1 = y = -8$$

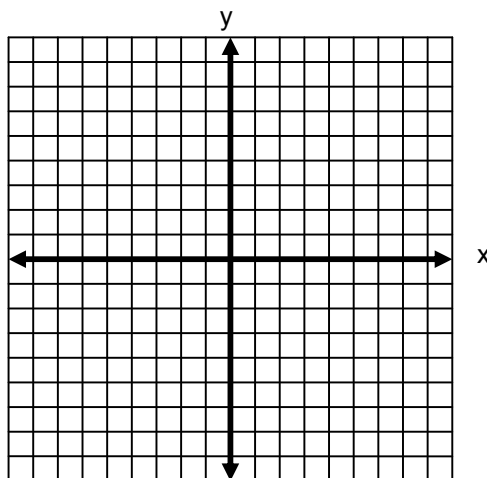
La coordenada del foco es  $F(6, -6)$ , el lado recto es igual a 4 y la ecuación de la directriz es  $y = -8$

Paso 3

Los resultados anteriores se localizan en el plano cartesiano para trazar la gráfica.



Ejercita tus conocimientos y obtén todos los elementos de la parábola  $y^2 - 12x - 6y + 33 = 0$ , así como su gráfica.



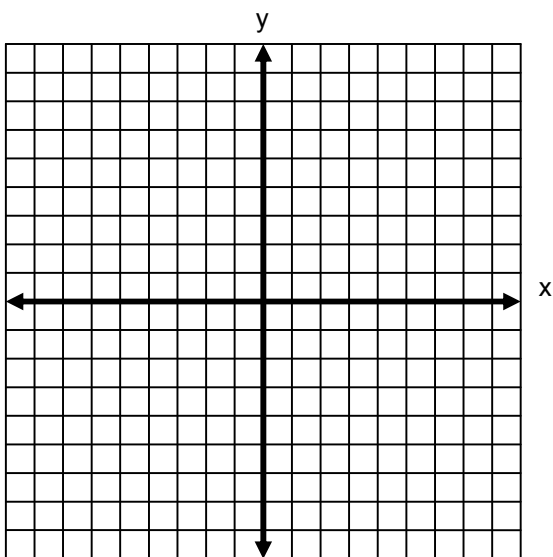
**EJERCICIOS**

**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se te solicita.

1. Sea una circunferencia con centro en  $C(-1, 2)$  y que pasa por el punto  $(-2, -3)$ .

I. Realiza la gráfica.

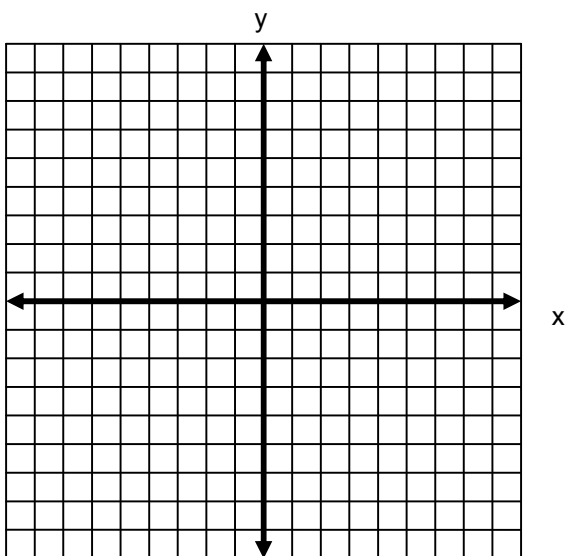
II. Obtén la ecuación de la circunferencia en forma general.



2. Sea una circunferencia cuyos extremos del diámetro son los puntos  $A(-3, 2)$  y  $B(5, -6)$

I. Realiza la gráfica.

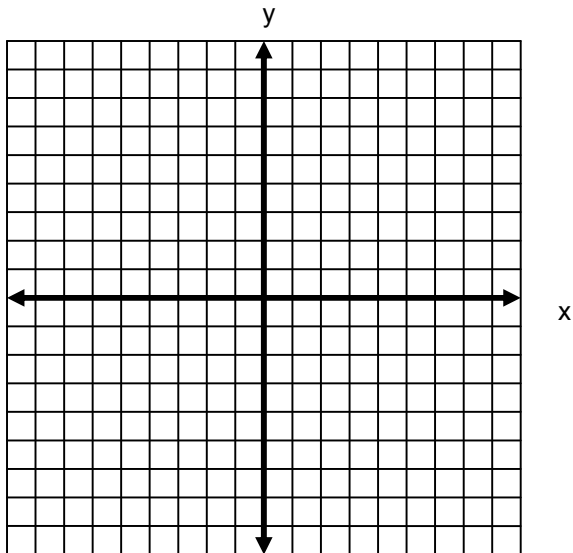
II. Obtén la ecuación de la circunferencia en forma general.



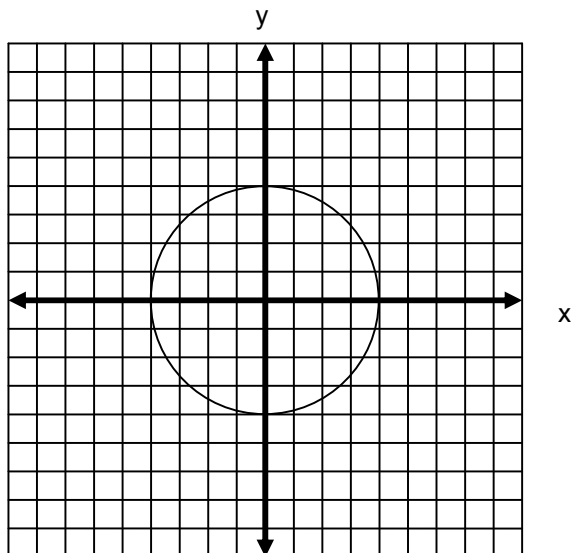
3. Sea una circunferencia con centro  $C(4, 2)$  y tangente a la recta  $5x - 4y + 7 = 0$ .

I. Realiza la gráfica.

II. Obtén la ecuación de la circunferencia en forma general.  
Aproxima el radio al siguiente número entero.

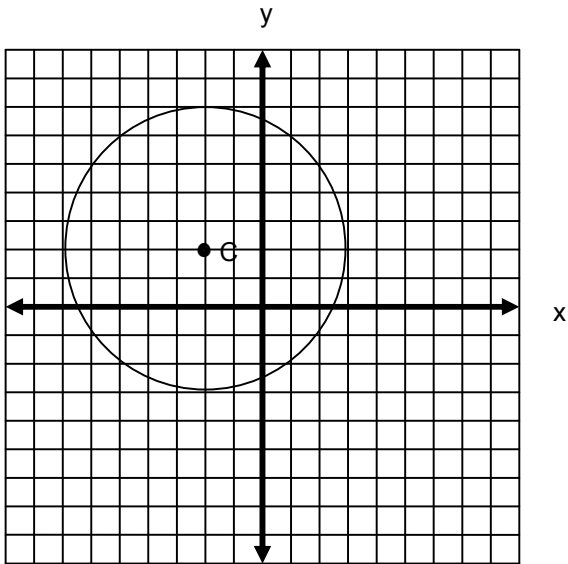


4. Analiza la siguiente grafica.



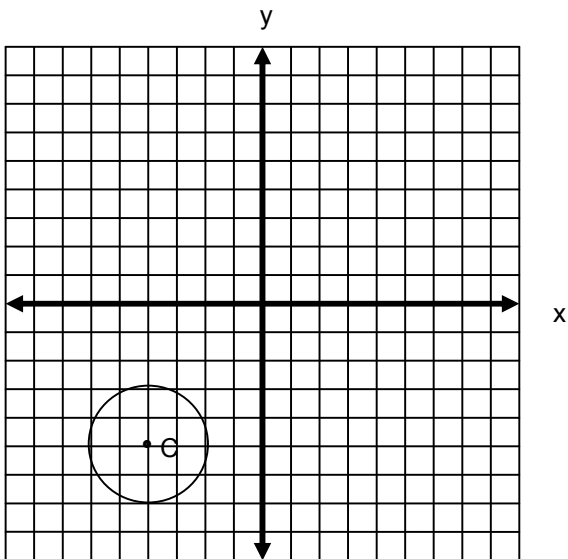
Obtén la ecuación de la circunferencia en forma general.

5. Analiza la siguiente grafica.



Obtén la ecuación de la circunferencia en forma general.

6. Analiza la siguiente grafica.

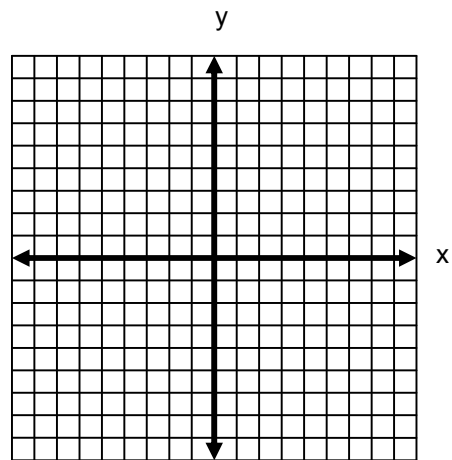


Obtén la ecuación de la circunferencia en forma general.

7. Sea la ecuación general de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 71 = 0$ .

I. Determina si se trata de una circunferencia, del conjunto vacío o de un punto.

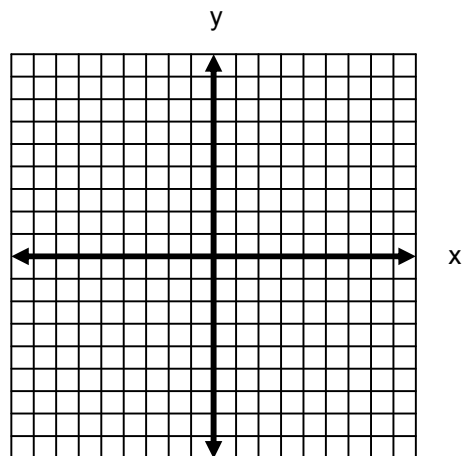
II. Realiza la gráfica.



8. Dada la ecuación general de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$ .

I. Determina si se trata de una circunferencia, del conjunto vacío o de un punto.

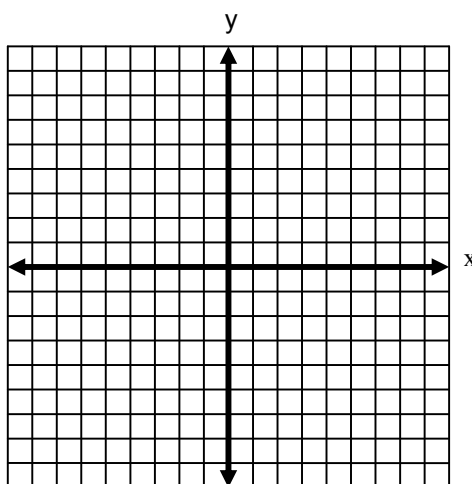
II. Realiza la gráfica.



9. Dada la siguiente ecuación de la circunferencia:  $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 52 = 0$ .

I. Encuentra el centro y radio

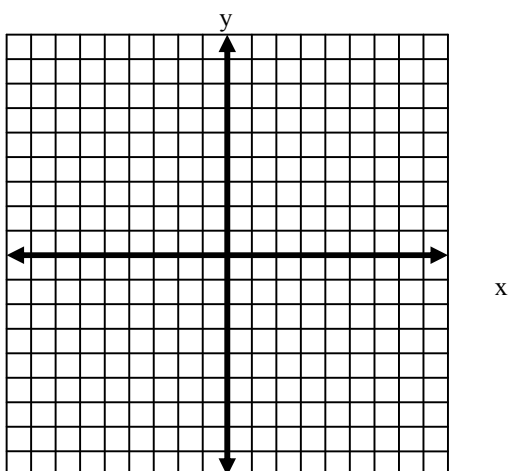
II. Realiza la gráfica.



10. Sea la coordenada del foco de una parábola  $(-3, 0)$  con vértice en el origen.

I. Realiza la gráfica.

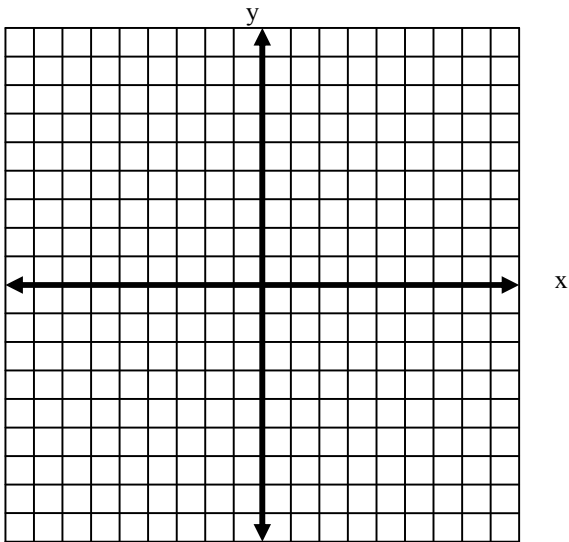
II. Encuentra la ecuación de la parábola en forma general.



11. El vértice de una parábola es el punto  $(-1, -1)$  y el foco  $(-1, 3)$ .

I. Realiza la gráfica.

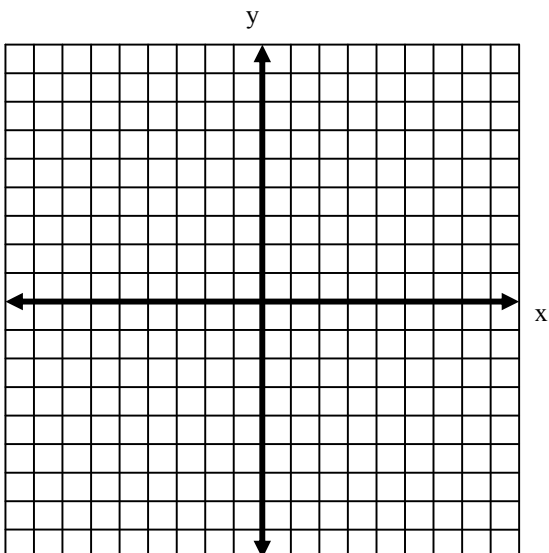
II. Encuentra la ecuación de la parábola en forma general.



12. El vértice de una parábola es el punto  $(3, 2)$  y la ecuación de la directriz  $x = 1$ .

I. Realiza la gráfica.

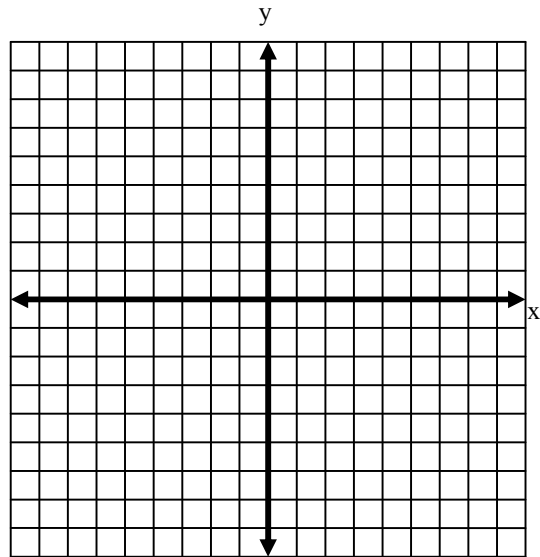
II. Encuentra la ecuación de la parábola en forma general.



13. Sea la ecuación de la parábola en forma general  $y^2 + 12x + 4y - 44 = 0$ .

I. Encuentra las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto de la parábola.

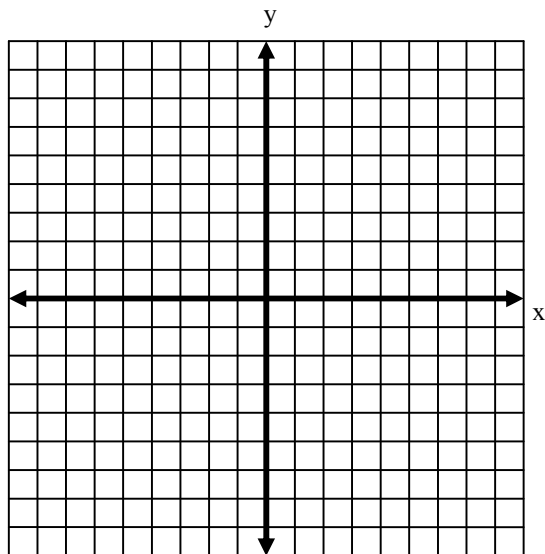
II. Realiza la gráfica.



14. Sea la ecuación de la parábola en forma general  $x^2 - 2x - 12y + 73 = 0$ .

I. Encuentra las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto de la parábola.

II. Realiza la gráfica.

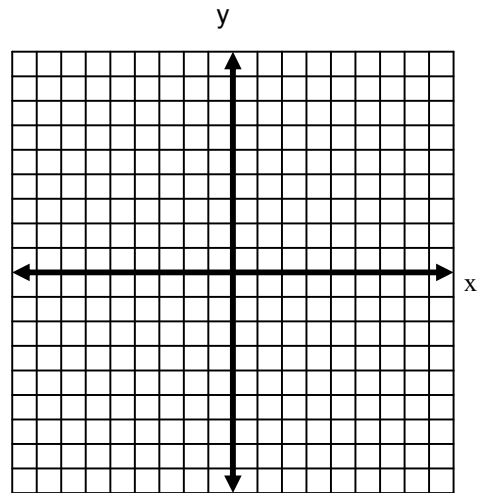




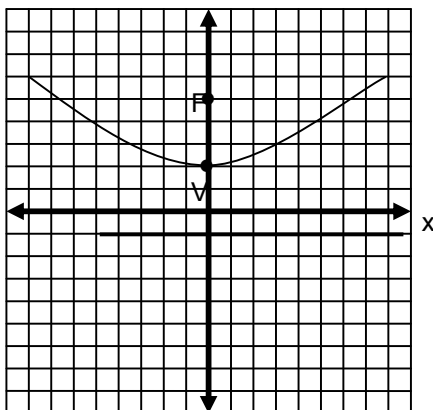
15. Sea la ecuación de la parábola en forma general  $y^2 + 4x - 10y + 33 = 0$ .

I. Encuentra las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto de la parábola.

II. Realiza la gráfica.



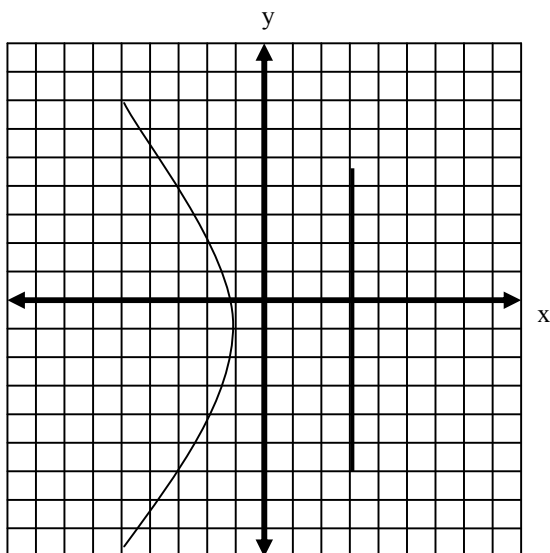
16. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto de la parábola.

II. Encuentra la ecuación de la parábola en forma general.

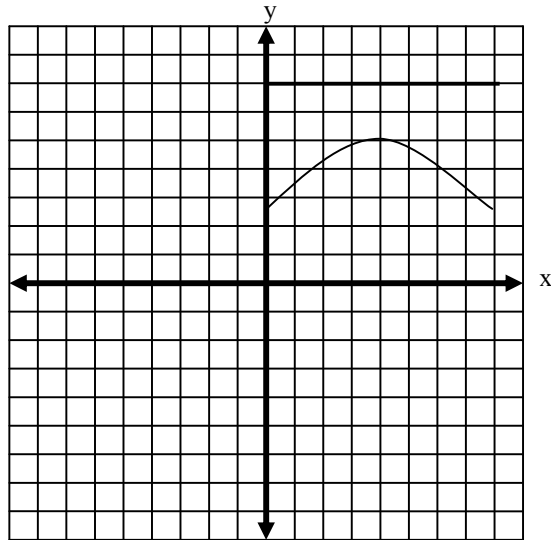
17. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto de la parábola.

II. Encuentra la ecuación de la parábola en forma general.

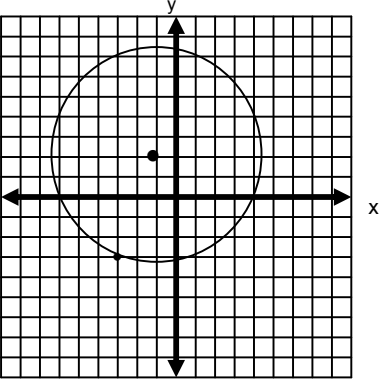
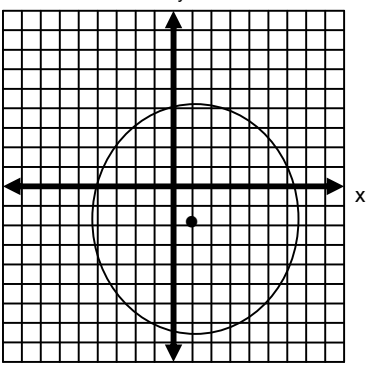
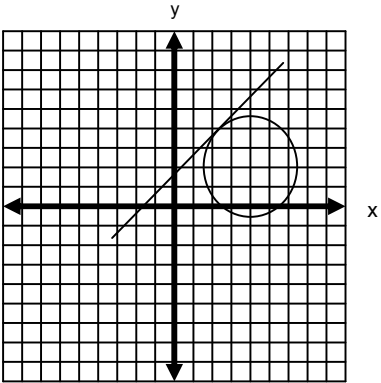
18. Analiza la siguiente gráfica.

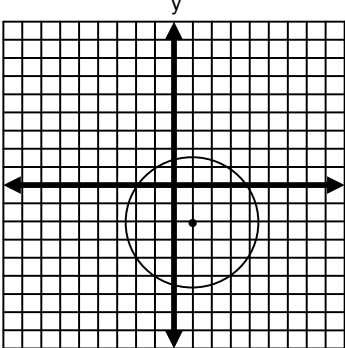
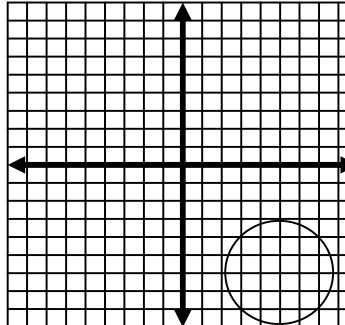


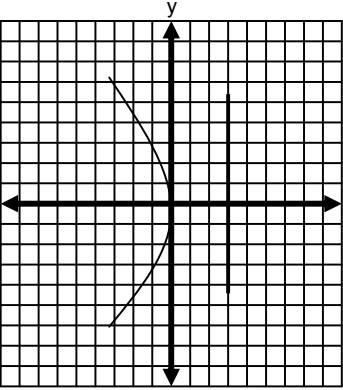
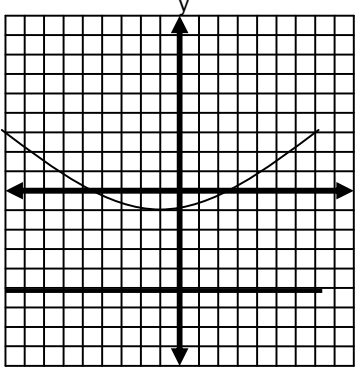
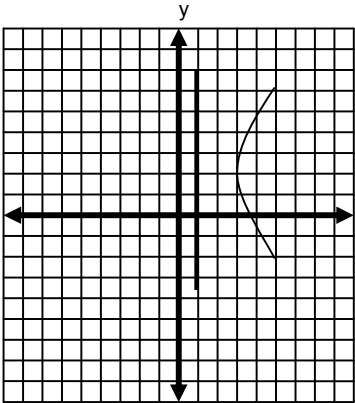
I. Encuentra las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto de la parábola.

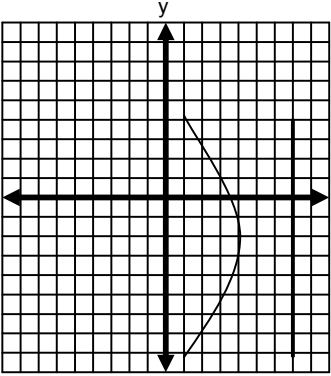
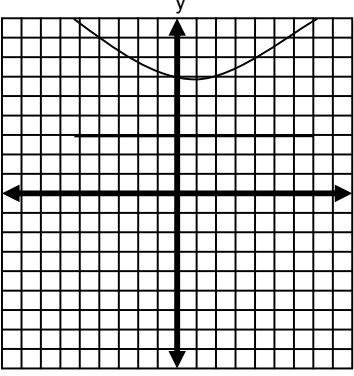
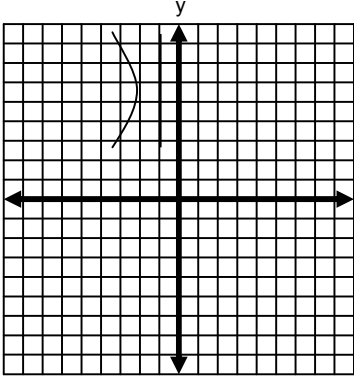
II. Encuentra la ecuación de la parábola en forma general.

**TABLA DE COMPROBACIÓN**

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	I.  II. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 21 = 0$
2	I.  II. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 27 = 0$
3	I.  II: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$
4	$x^2 + y^2 - 16 = 0$

Número de pregunta	Respuesta correcta
5	$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$
6	$x^2 + y^2 + 8x + 10y + 37 = 0$
7	<p>I. Se trata de un conjunto vacío por tener una raíz negativa.</p> $r = \sqrt{-42}$ <p>II. Por ser un conjunto vacío no tiene gráfica.</p>
8	<p>I. Se trata de una circunferencia.</p> <p><math>r = \sqrt{12}</math> y C (1, -2)</p> <p>II.</p> 
9	<p>I. C (5, -6) r = 3</p> <p>II.</p> 

Número de pregunta	Respuesta correcta
10	<p>I. </p> <p>II. <math>y^2 + 12x = 0</math></p>
11	<p>I. </p> <p>II. <math>x^2 + 2x - 16y - 15 = 0</math></p>
12	<p>I. </p> <p>II. <math>y^2 - 8x - 4y + 28 = 0</math></p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
13	<p>I. V (4, -2), F (1, -2)      Directriz <math>x = 7</math>, <math>lr = 12</math></p> <p>II.</p> 
14	<p>I. V (1, 6), F (1, 9)      Directriz <math>y = 3</math>, <math>lr = 12</math></p> <p>II.</p> 
15	<p>I. V (-2, 5), F (-3, 5)      Directriz <math>x = -1</math>, <math>lr = 4</math></p> <p>II.</p> 

Número de pregunta	Respuesta correcta
16	I. V (0, 2), F (0, 5) Directriz $y = -1$ , $lr = 12$ II. $x^2 - 12y + 24 = 0$
17	I. V (-1, -1), F (-5, -1) Directriz $x = 3$ , $lr = 16$ II. $y^2 + 16x + 2y + 17 = 0$
18	I. V (4, 5), F (4, 3) Directriz $y = 7$ , $lr = 8$ II. $x^2 - 8x + 8y - 24 = 0$
<b>Sugerencias</b>	
<p>Las coordenadas del centro de la circunferencia, cuando ésta tiene centro fuera del origen, son (h, k).</p> <p>Una recta tangente a la circunferencia es aquella que pasa por un punto de la periferia de la misma.</p> <p>En la parábola, la distancia del foco al vértice es la misma que del foco a la directriz.</p> <p>En la parábola, si el término cuadrático es <math>x</math> se trata de una parábola vertical; si el término cuadrático es <math>y</math> se trata de una parábola horizontal.</p>	



### 2.3 El modelo general de las cónicas: sus características.

#### Aprendizajes

- Deducir el tipo de cónica a partir de la ecuación general de 2° grado.
- Inferir la ecuación de la elipse a partir de las condiciones de vértices, focos y excentricidad.
- Deducir la ecuación de la elipse a partir de su gráfica.
- Deducir la ecuación de la hipérbola a partir de las condiciones del lugar geométrico.
- Deducir la ecuación de la hipérbola a partir de su gráfica.

La ecuación en forma general de las cónicas se representa como:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado con dos incógnitas. **Los coeficientes de los términos de la ecuación determinan el tipo de cónica a la cual se refiere la ecuación.**

Si la ecuación es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El término  $Bxy$  no aparece en los casos anteriores debido a que los ejes de la cónica coinciden o son paralelos a los ejes cartesianos, es decir *el término  $Bxy$  sólo aparece cuando los ejes del plano se hacen girar, un ángulo dado, esto es cuando los ejes de la cónica no coinciden con los ejes del plano cartesiano.*

Para nuestro propósito siempre que aparezca este término su valor será igual a cero.

En la ecuación general de las cónicas se llama indicador o discriminante al valor obtenido de la ecuación:

$$I = B^2 - 4AC$$

Siendo tres casos los más importantes:

Cuando  $I < 0$ , la ecuación representa una elipse, una **circunferencia, un punto o un conjunto vacío.**

Cuando  $I > 0$ , la ecuación representa una **hipérbola o dos rectas que se cortan.**

Cuando  $I = 0$ , la ecuación representa una **parábola, dos rectas paralelas o un conjunto vacío.**

El caso de  $Bxy = 0$  se analiza de la siguiente forma:

Si  $A = C$ , la ecuación representa una **circunferencia, un punto o un conjunto vacío.**

Si  $A = 0$  o  $C = 0$ , la ecuación representa una **parábola, dos rectas paralelas o un conjunto vacío.**

Si  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $A \neq C$  y **ambos tienen igual signo**, la ecuación representa una **elipse, un punto o un conjunto vacío.**

Si  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $A \neq C$  y **ambos tienen signo contrario**, la ecuación representa una **hipérbola o dos rectas que se cortan.**

Las consideraciones algebraicas anteriores influyen de la siguiente manera en el caso de la elipse.

**La elipse** se define como el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos fijos es constante.

Como en la circunferencia y la parábola se tienen dos casos de elipses: horizontal y vertical y con centro en el origen y fuera de él.

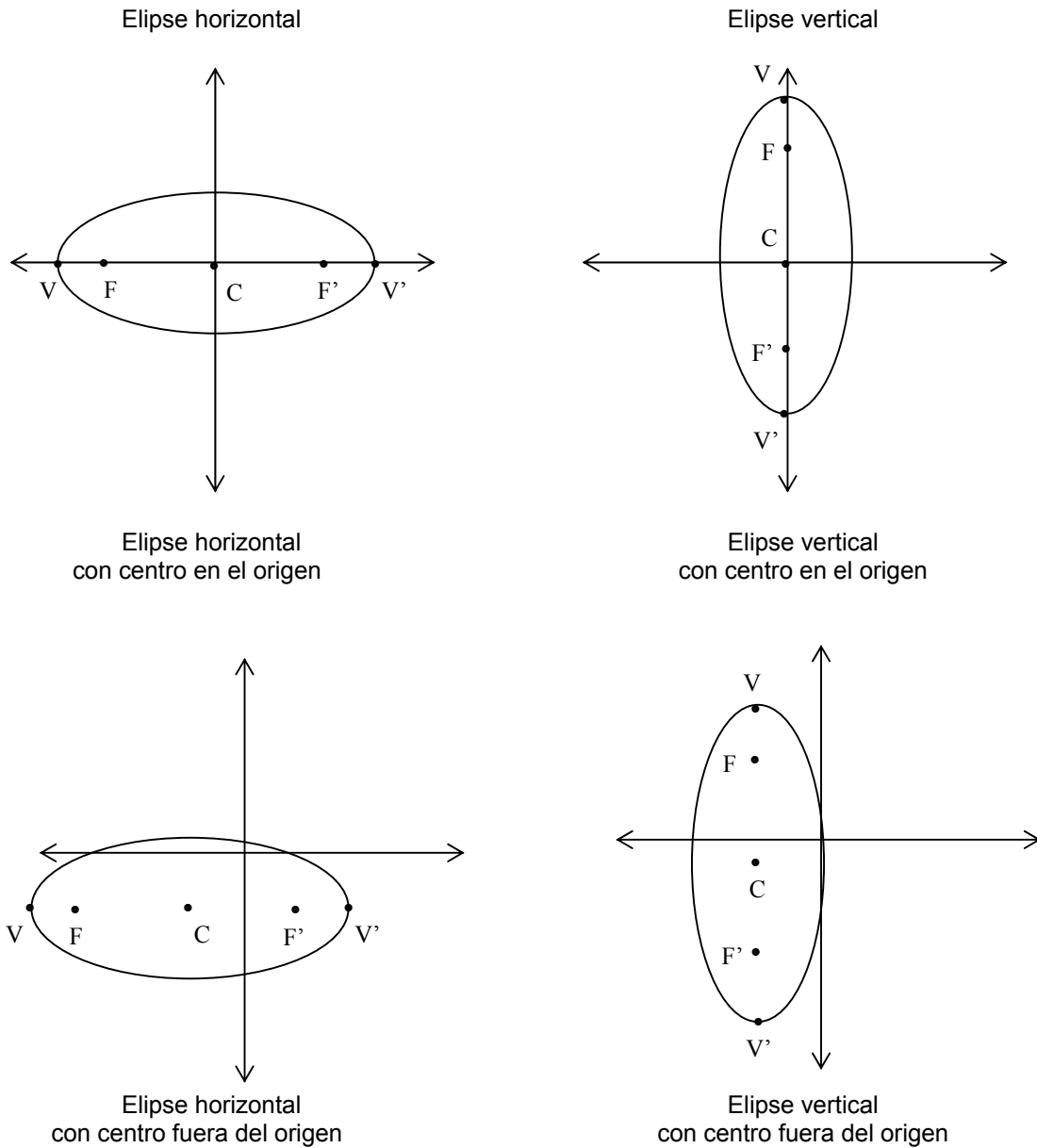
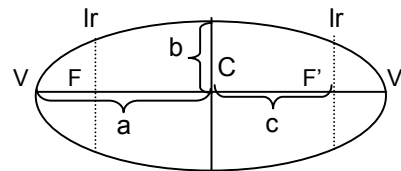


Figura 1

Fórmulas de la elipse

	Elipse horizontal	Elipse vertical
Con centro en el origen	<p>C (0, 0)                      V (a, 0), V' (-a, 0)                      F (c, 0), F' (-c, 0)  <math>a^2 = b^2 + c^2</math>  <math>lr = \frac{2b^2}{a}</math>  <math>e = \frac{c}{a} &lt; 1</math>  <math>\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1</math></p>	<p>C (0, 0)                      V (0, a), V' (0, -a)                      F (0, c), F' (0, -c)  <math>a^2 = b^2 + c^2</math>  <math>lr = \frac{2b^2}{a}</math>  <math>e = \frac{c}{a} &lt; 1</math>  <math>\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1</math></p>
Con centro fuera del origen	<p>C (h, k)                      V (h + a, k), V' (h - a, k)                      F (h + c, k), F' (h - c, k)  <math>a^2 = b^2 + c^2</math>  <math>lr = \frac{2b^2}{a}</math>  <math>e = \frac{c}{a} &lt; 1</math>  <math>\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1</math></p>	<p>C (h, k)                      V (h, k + a), V' (h, k - a)                      F (h, k + c), F' (h, k - c)  <math>a^2 = b^2 + c^2</math>  <math>lr = \frac{2b^2}{a}</math>  <math>e = \frac{c}{a} &lt; 1</math>  <math>\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1</math></p>
<p>Donde: a = semieje mayor.                      b = semieje menor.                      c = distancia del centro al foco.                      C = centro de la elipse.                      F = foco de la elipse.                      V = vértice de la elipse.                      lr = lado recto.</p>		



Al desarrollar los binomios al cuadrado se encuentra la ecuación general.

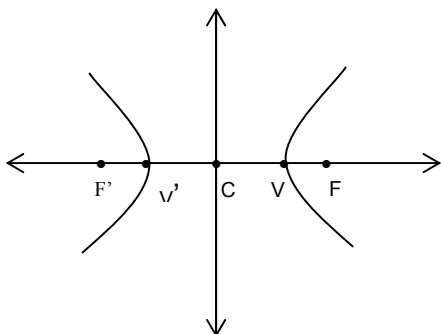
Elipse horizontal	Elipse vertical
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Dada la ecuación general de la elipse se pueden obtener el centro, los vértices, focos y excentricidad de la misma con las fórmulas siguientes:

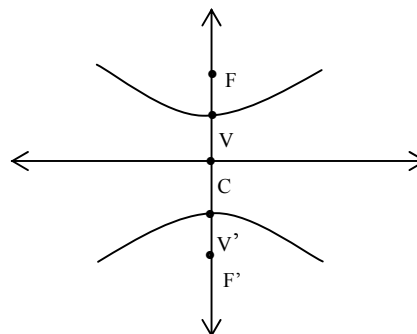
Elipse horizontal	Elipse vertical
$A = b^2$ $C = a^2$	$A = a^2$ $C = b^2$
$h = -\frac{D}{2b^2}$	$h = -\frac{D}{2a^2}$
$k = -\frac{E}{2a^2}$	$k = -\frac{E}{2b^2}$
$A < C$	$A > C$
Donde: $h$ = abscisa del centro. $k$ = ordenada del centro. $a$ = semieje mayor. $b$ = semieje menor.	

En el caso de la hipérbola sucede lo siguiente. **La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos cuya diferencia positiva entre las distancias a dos puntos fijos es una constante.**

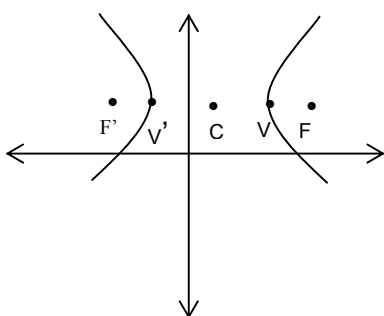
Al igual que en las otras cónicas hay dos tipos de hipérbolas: horizontal y vertical, con centro en el origen y con centro fuera de él.



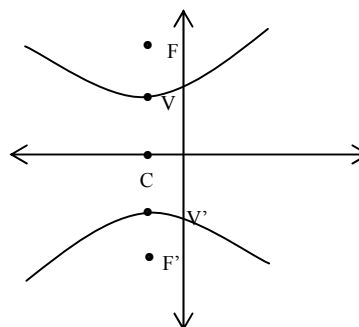
Hipérbola horizontal con centro en el origen



Hipérbola vertical con centro en el origen



Hipérbola horizontal con centro fuera del origen



Hipérbola vertical con centro fuera del origen

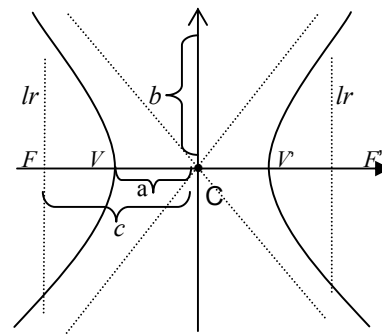
Figura 2

Fórmulas de la hipérbola

	Hipérbola horizontal	Hipérbola vertical
Con centro en el origen	<p>C (0, 0)                      V (a, 0), V' (-a, 0)                      F (c, 0), F' (-c, 0)  <math>c^2 = a^2 + b^2</math>  <math>lr = \frac{2b^2}{a}</math>  <math>e = \frac{c}{a} &gt; 1</math>  <math>\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math></p>	<p>C (0, 0)                      V (0, a), V' (0, -a)                      F (0, c), F' (0, -c)  <math>c^2 = a^2 + b^2</math>  <math>lr = \frac{2b^2}{a}</math>  <math>e = \frac{c}{a} &gt; 1</math>  <math>\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1</math></p>
Con centro fuera del origen	<p>C (h, k)                      V (h + a, k), V' (h - a, k)                      F (h + c, k), F' (h - c, k)  <math>c^2 = a^2 + b^2</math>  <math>lr = \frac{2b^2}{a}</math>  <math>e = \frac{c}{a} &gt; 1</math>  <math>\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1</math></p>	<p>C (h, k)                      V (h, k + a), V' (h, k - a)                      F (h, k + c), F' (h, k - c)  <math>c^2 = a^2 + b^2</math>  <math>lr = \frac{2b^2}{a}</math>  <math>e = \frac{c}{a} &gt; 1</math>  <math>\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1</math></p>

Donde:

- $a$  = semieje transverso.
- $b$  = semieje conjugado.
- $c$  = distancia del centro al foco.
- C = centro de la hipérbola.
- F = foco de la hipérbola.
- V = vértice de la hipérbola.
- $lr$  = lado recto.



Al desarrollar los binomios al cuadrado se encuentra la ecuación general.

Hipérbola horizontal	Hipérbola vertical
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Dada la ecuación general de la elipse se pueden obtener el centro, los vértices, focos y excentricidad de la misma con las fórmulas siguientes.

Hipérbola horizontal	Hipérbola vertical
$A = b^2$ $C = -a^2$  $h = -\frac{D}{2b^2}$  $k = \frac{E}{2a^2}$  A es positiva	$A = -a^2$ $C = b^2$  $h = \frac{D}{2a^2}$  $k = -\frac{E}{2b^2}$  C es positiva
Donde: $h$ = abscisa del centro. $k$ = ordenada del centro. $a$ = semieje transversal. $b$ = semieje conjugado.	

**APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO**

A continuación analizaremos qué tipo de cónica representa la siguiente ecuación.

$$7x^2 - 2xy + 7y^2 - 24x - 24y + 1 = 0$$

Paso 1

Se identifican los valores de los coeficientes A, B y C.

$$A = 7, \quad B = -2 \quad \text{y} \quad C = 7$$

Paso 2

Los valores se sustituyen en la ecuación de la discriminante y se calcula el resultado

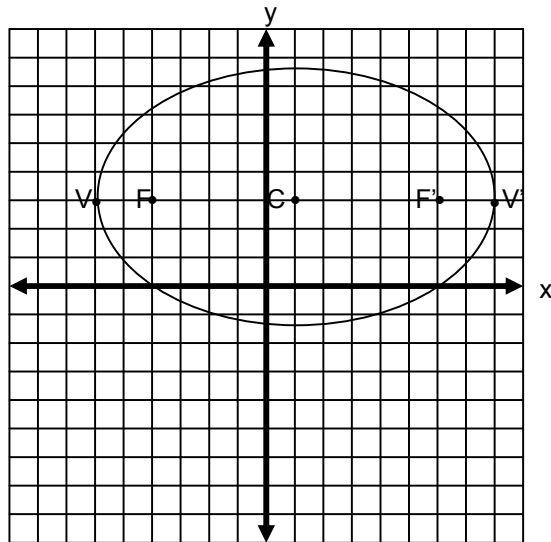
$$I = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(7)(7) = 4 - 196 = -192$$

El resultado es negativo; por lo tanto, se trata de una elipse o circunferencia. Como  $A = C$ , se trata de una **circunferencia**.

Ejercita tus conocimientos e identifica qué tipo de cónica representa la siguiente ecuación y grafícala.

$$8x^2 + 8xy - 2y^2 - 5x - 5y - 3 = 0$$

Ahora analizaremos la siguiente gráfica.



Paso 1

Se localizan las coordenadas del centro, vértices y focos de la elipse.

$$C (1, 3), V (-6, 3), V' (8, 3), F (-4, 3) \text{ y } F' (6, 3)$$

Paso 2

Se identifica el valor de  $a$  y  $c$ .

$$a = 7 \text{ y } c = 5$$

Paso 3

Se calcula el valor del semieje menor, lado recto y la excentricidad. Para calcular el valor del semieje se despeja el valor de  $b$  de la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24}$$

Después se calcula el lado recto.

$$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(\sqrt{24})^2}{7} = \frac{2(24)}{7} = \frac{48}{7}$$

Ahora la excentricidad.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{7}$$



**Paso 4**

Se sustituyen los valores en la ecuación de la elipse y se obtiene su forma ordinaria.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{7^2} + \frac{(y-3)^2}{(\sqrt{24})^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{24} = 1$$

**Paso 5**

Se desarrollan los binomios para obtener la forma general de la elipse.

$$\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{24} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{49} + \frac{y^2 - 6y + 9}{24} = 1$$

$$\frac{24(x^2 - 2x + 1) + 49(y^2 - 6y + 9)}{1176} = 1$$

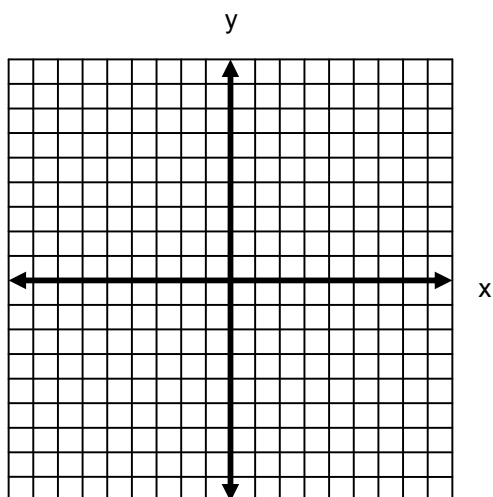
$$\frac{24x^2 - 48x + 24 + 49y^2 - 294y + 441}{1176} = 1$$

$$24x^2 - 48x + 24 + 49y^2 - 294y + 441 = 1176$$

$$24x^2 - 48x + 24 + 49y^2 - 294y + 441 - 1176 = 0$$

$$24x^2 + 49y^2 - 48x - 294y - 711 = 0$$

Ejercita tus conocimientos y encuentra la ecuación de la elipse en forma general que tiene como vértices los puntos V (-2, 8) y V' (-2, 0) y focos F (-2, 6) y F' (-2, 2). Recuerda que debes realizar la gráfica.



A continuación encontraremos la ecuación en forma general de la hipérbola cuyos vértices son los puntos: V (3, 4) y V' (3, 0) y sus focos son: F (3, 5) y F' (3, -1)

Paso 1

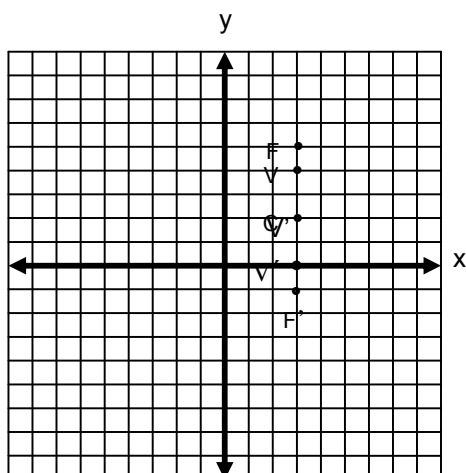
El centro de la hipérbola se localiza en el punto medio entre los vértices.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 + 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

El centro es C (3, 2).

Paso 2

Se trazan los puntos para determinar el tipo de la hipérbola.



Como los puntos están alineados en el eje “y”, se trata de una hipérbola vertical.

## Paso 3

Se calculan los elementos como son: lado recto, excentricidad, semieje transverso y semieje conjugado.

$$a = \text{distancia del centro al vértice} = 2. \quad c = \text{distancia del centro al foco} = 3.$$

Por lo tanto, para calcular  $b$  se despeja de la fórmula:  $c^2 = a^2 + b^2$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

Se calcula el lado recto.

$$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(\sqrt{5})^2}{2} = \frac{2(5)}{2} = 5$$

Se calcula la excentricidad.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

## Paso 4

Se calcula la ecuación de la hipérbola en forma ordinaria.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-2)^2}{2^2} - \frac{(x-3)^2}{(\sqrt{5})^2} \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5}$$

## Paso 5

Se calcula la ecuación de la hipérbola en forma general desarrollando la ecuación anterior.

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1$$

$$\frac{y^2 - 4y + 4}{4} - \frac{x^2 - 6x + 9}{5} = 1$$

$$\frac{5(y^2 - 4y + 4) - 4(x^2 - 6x + 9)}{20} = 1$$

$$\frac{5y^2 - 20y + 20 - 4x^2 + 24x - 36}{20} = 1$$

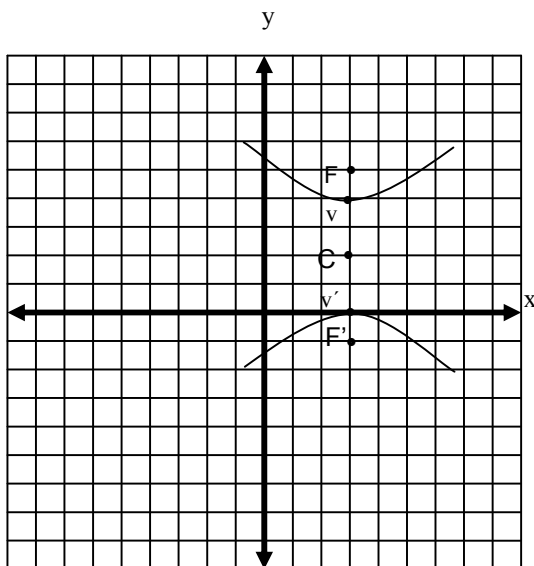
$$5y^2 - 20y + 20 - 4x^2 + 24x - 36 = 20$$

$$5y^2 - 20y + 20 - 4x^2 + 24x - 36 - 20 = 0$$

$$-4x^2 + 5y^2 + 24x - 20y - 36 = 0$$

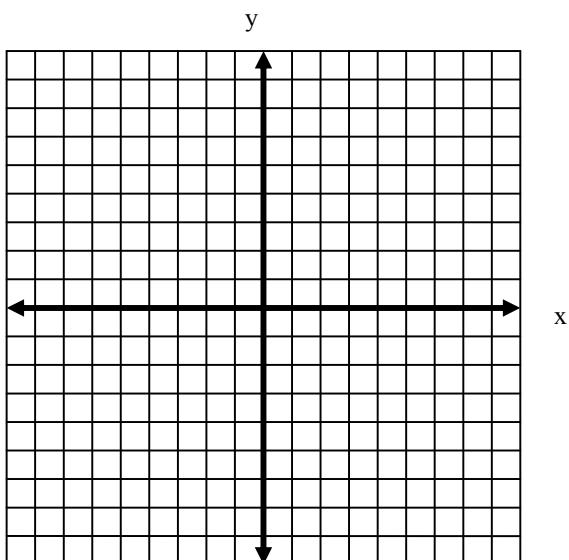
Paso 6

Se traza la gráfica de la hipérbola.



Recuerda que si te dan la gráfica tienes que identificar los datos del centro, vértices y focos de la hipérbola.

Ejercita tus conocimientos y encuentra la ecuación en forma general de la hipérbola cuyos vértices son los puntos:  $V(2, -1)$  y  $V'(6, -1)$  y sus focos son:  $F(0, -1)$  y  $F'(8, -1)$ . Realiza la gráfica.



## EJERCICIOS

**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se te solicita.

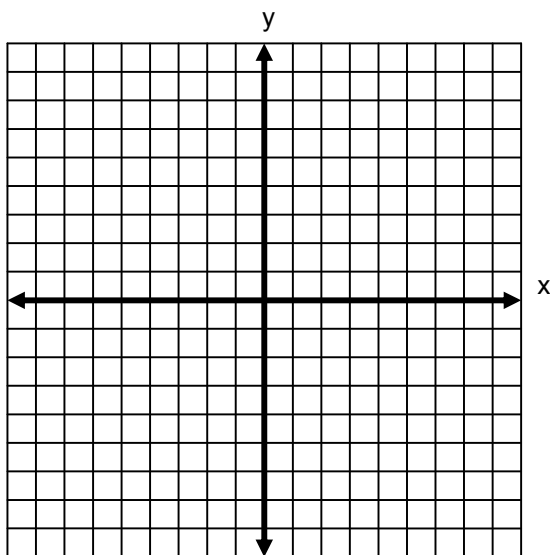
1. Determina la cónica que representa la ecuación  $14x^2 - 2xy + 14y^2 - 40x + 68y - 370 = 0$ .

2. Determina la cónica que representa la ecuación  $3x^2 + 4xy + 2y^2 + x - 3y + 5 = 0$ .

3. Determina la cónica que representa la ecuación  $5x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 5y - 1 = 0$ .

4. Sea una elipse con centro en el origen, vértices en  $V(0, 3)$  y  $V'(0, -3)$  y focos  $F(0, 2)$  y  $F'(0, -2)$ .

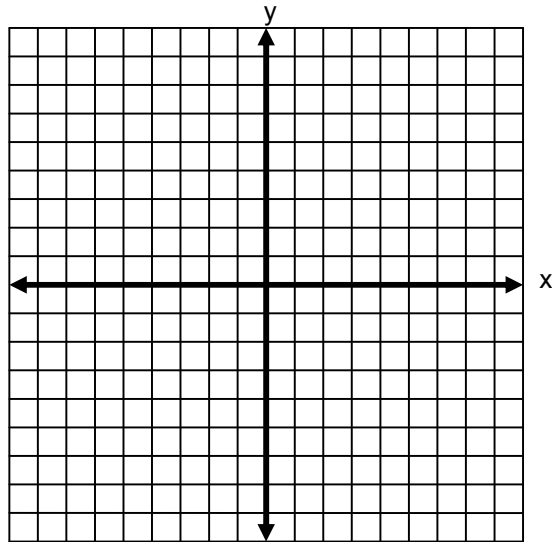
I. Realiza la gráfica.



II. Obtén la ecuación de la elipse en forma general.

5. Sea una elipse con vértices en  $V(-3, 4)$  y  $V'(7, 4)$  y focos  $F(-1, 4)$  y  $F'(5, 4)$ .

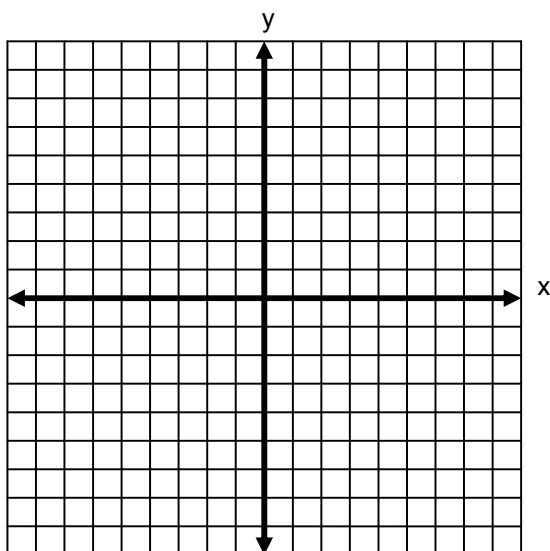
I. Realiza la gráfica.



II. Obtén la ecuación de la elipse en forma general.

6. Sea una elipse con vértices en  $V(-2, 7)$  y  $V'(-2, -1)$  y excentricidad  $e = \frac{3}{4}$ .

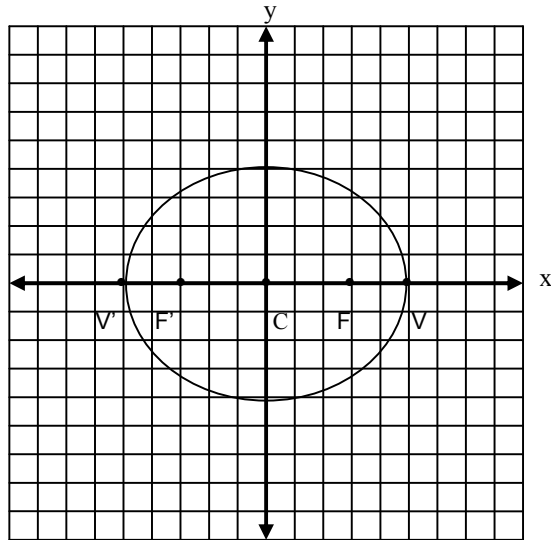
I. Realiza la gráfica.



II. Obtén la ecuación de la elipse en forma general.



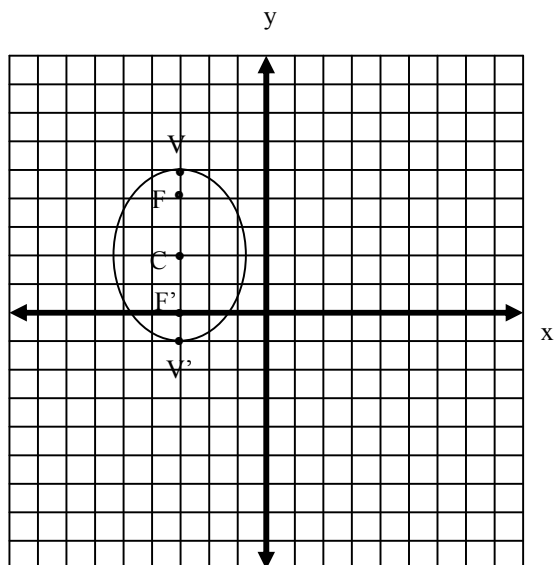
7. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y lado recto de la elipse.

II. Encuentra la ecuación de la elipse en forma general.

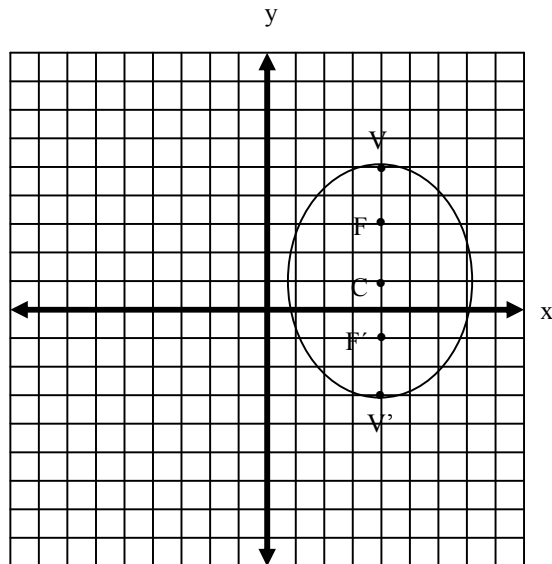
8. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y lado recto de la elipse.

II. Encuentra la ecuación de la elipse en forma general.

9. Analiza la siguiente gráfica.

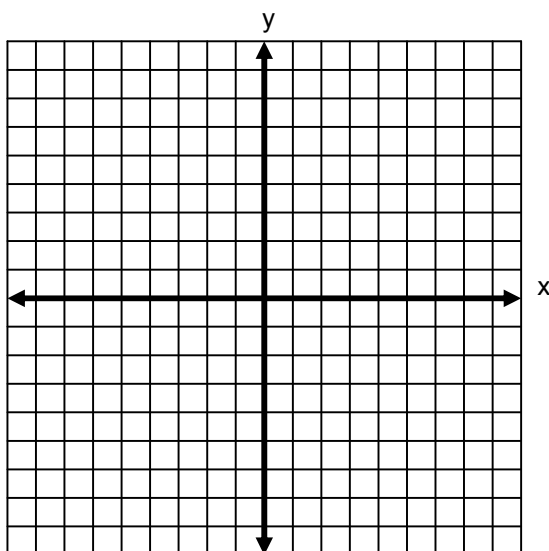


I. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y lado recto de la elipse.

II. Encuentra la ecuación de la elipse en forma general.

10. Una hipérbola con centro en el origen tiene los siguientes valores: vértices en  $V(3, 0)$  y  $V'(-3, 0)$  y focos  $F(4, 0)$  y  $F'(-4, 0)$ .

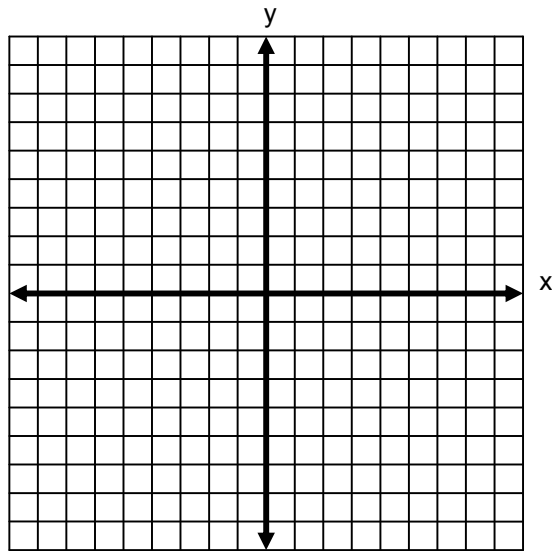
I. Realiza la gráfica.



II. Obtén la ecuación de la hipérbola en forma general.

11. Sea una hipérbola con vértices en  $V(3, -1)$  y  $V'(5, -1)$  y focos  $F(2, -1)$  y  $F'(6, -1)$ .

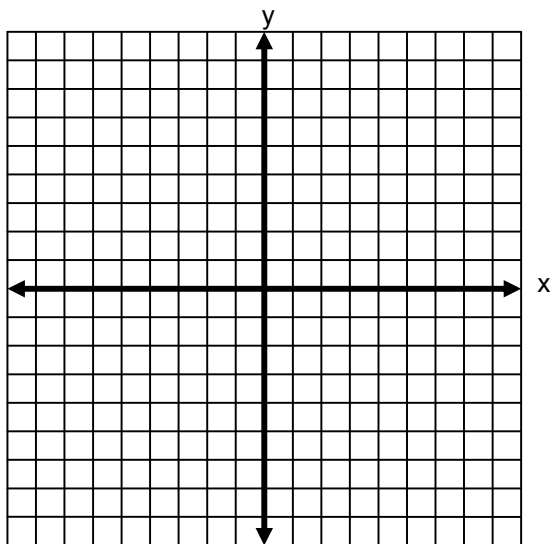
I. Realiza la gráfica.



II. Obtén la ecuación de la hipérbola en forma general.

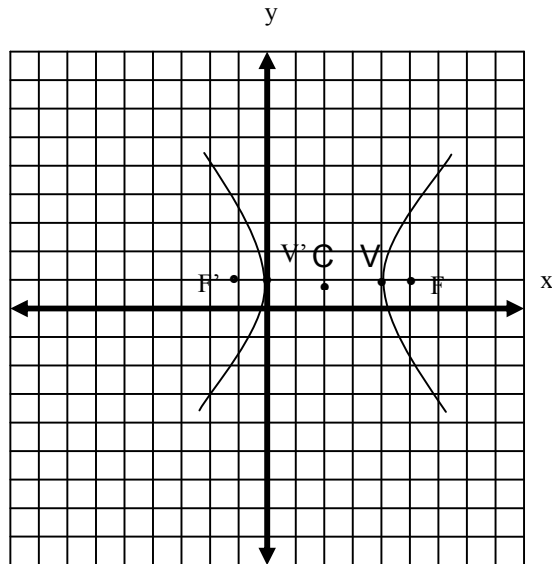
12. Sea una hipérbola con vértices en  $V(4, 6)$  y  $V'(4, 2)$  y excentricidad  $e = \frac{3}{2}$ .

I. Realiza la gráfica.



II. Obtén la ecuación de la hipérbola en forma general.

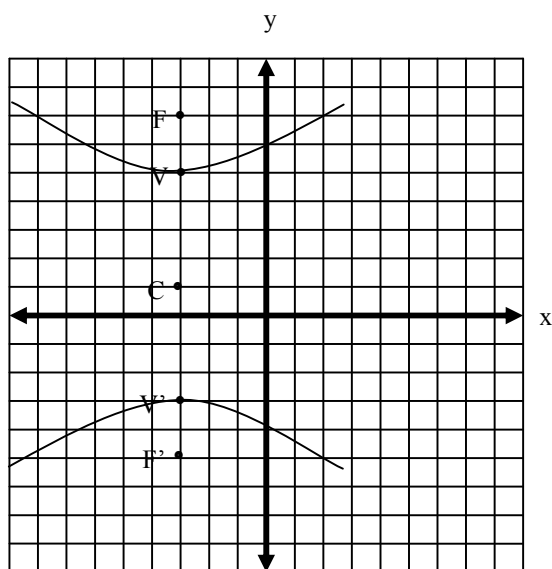
13. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y lado recto de la hipérbola.

II. Encuentra la ecuación de la hipérbola en forma general.

14. Analiza la siguiente gráfica.

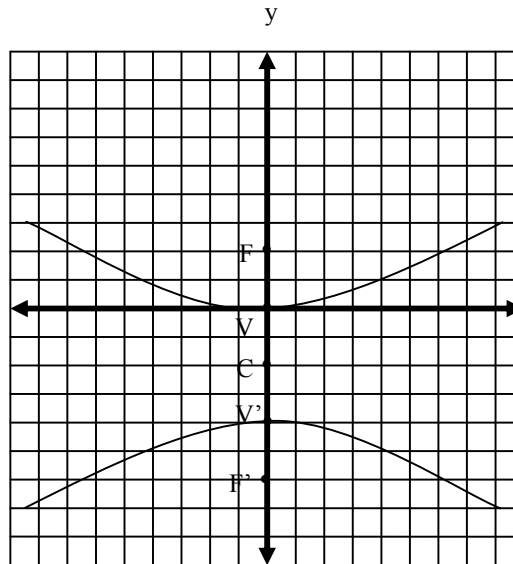


I. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y lado recto de la hipérbola.

II. Encuentra la ecuación de la hipérbola en forma general.



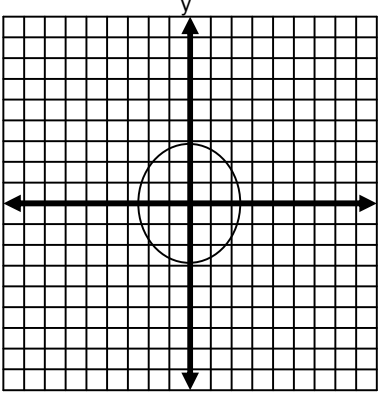
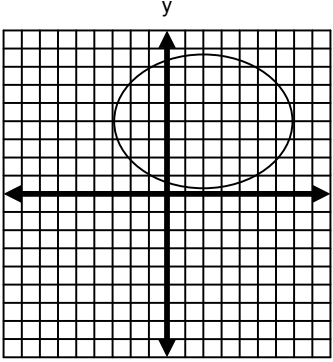
15. Analiza la siguiente gráfica.

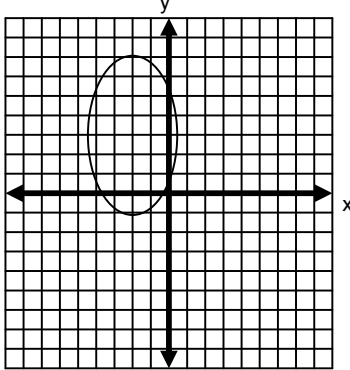


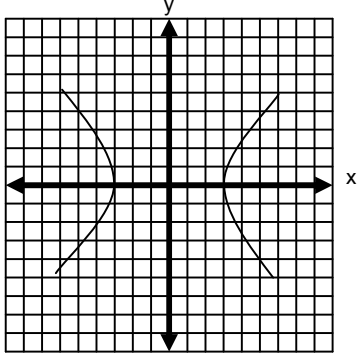
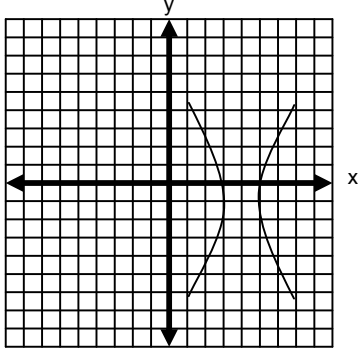
I. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y lado recto de la hipérbola.

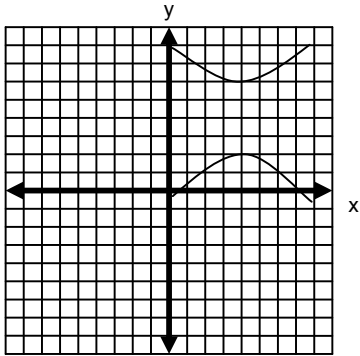
II. Encuentra la ecuación de la hipérbola en forma general.

**TABLA DE COMPROBACIÓN**

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	<p><math>I = -780</math></p> <p><math>I &lt; 0</math> se trata de una elipse o circunferencia. Como <math>A = C</math>, se trata de una circunferencia.</p>
2	<p><math>I = -8</math></p> <p><math>I &lt; 0</math> se trata de una elipse o circunferencia. Como <math>A \neq C</math>, se trata de una elipse.</p>
3	<p><math>I = 24</math></p> <p><math>I &gt; 0</math> se trata de una hipérbola.</p>
4	<p>I</p>  <p>II. <math>9x^2 + 5y^2 - 45 = 0</math></p>
5	<p>I</p>  <p>II. <math>16x^2 + 25y^2 - 64x - 200y + 64 = 0</math></p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
6	<p>I.</p>  <p>II: <math>16x^2 + 7y^2 + 64x - 42y + 15 = 0</math></p>
7	<p>I.</p> <p>C (0, 0)</p> <p>V (5, 0) y V' (-5, 0)</p> <p>F (3, 0) y F' (-3, 0)</p> $e = \frac{3}{5}$ $lr = \frac{32}{5}$ <p>II. <math>16x^2 + 25y^2 - 400 = 0</math></p>
8	<p>I.</p> <p>C (-3, 2)</p> <p>V (-3, 5) y V' (-3, -1)</p> <p>F (-3, 4) y F' (-3, 0)</p> $e = \frac{2}{3}$ $lr = \frac{10}{3}$ <p>II: <math>9x^2 + 5y^2 + 54x - 20y + 56 = 0</math></p>

Número de pregunta	Respuesta correcta
9	I. $C(4, 1)$ $V(4, 5)$ y $V'(4, -3)$ $F(4, 3)$ y $F'(4, -1)$ $e = \frac{1}{2}$ $lr = 6$ II: $16x^2 + 12y^2 + 128x - 24y + 76 = 0$
10	I.  II.. $7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$
11	I.  II. $3x^2 - y^2 - 24x - 2y + 44 = 0$

Número de pregunta	Respuesta correcta
12	I.  II. $-4x^2 + 5y^2 + 32x - 40y - 4 = 0$
13	I. $C(2, 1)$ $V(4, 1)$ y $V'(0, 1)$ $F(5, 1)$ y $F'(-1, 1)$ $e = \frac{3}{2}$ , $lr = 5$ II. $5x^2 - 4y^2 - 20x + 8y - 4 = 0$
14	I. $C(-3, 1)$ $V(-3, 5)$ y $V'(-3, -3)$ $F(-3, 7)$ y $F'(-3, -5)$ $e = \frac{3}{2}$ , $lr = 10$ II. $-16x^2 + 20y^2 - 96x - 40y - 444 = 0$
15	I. $C(0, -2)$ $V(0, 0)$ y $V'(0, -4)$ $F(0, 2)$ y $F'(0, -6)$ $e = 2$ , $lr = 12$ II. $-4x^2 + 12y^2 + 48y = 0$
<b>Sugerencias</b>	
<p>El término <math>Bxy = 0</math> y sólo aparece cuando los ejes de la cónica no coinciden o no son paralelos con los ejes del plano cartesiano.</p> <p>Las coordenadas de la elipse e hipérbola con centro fuera del origen son <math>(h, k)</math>.</p> <p>El resultado de un binomio al cuadrado es el cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo más el segundo término al cuadrado.</p>	



## 2.4 Aplicaciones de las cónicas

### Aprendizajes

- Resolver problemas de la Geometría o la Física a partir de las cónicas.

Las cónicas están presentes en nuestra vida; diaria, las podemos encontrar en las bóvedas de algunos edificios, antenas parabólicas, radares, órbitas de satélites, puentes, telescopios, estructuras arquitectónicas por nombrar algunos ejemplos.

**La parábola** representa en gran medida la trayectoria en el tiro horizontal, de ahí el nombre de tiro parabólico, así como también el movimiento de caída libre y en algunos casos las trayectorias seguidas por cuerpos celestes.

El diseño de espejos cóncavos y convexos, antenas parabólicas y la reflexión de la luz se explica a través de la parábola. En la ingeniería civil los puentes colgantes son un ejemplo del uso de esta cónica.

**La elipse** se utiliza para detectar y estudiar las órbitas planetarias, en el diseño de tapas para recipientes o reactores o en la construcción de muebles y túneles.

**La circunferencia** se considera un caso especial de la elipse y se utiliza en el diseño de muebles, en la construcción de carreteras y en diseños de arquitectura.

**La hipérbola** describe la trayectoria de algunas partículas radioactivas o de algunos cuerpos celestes; en la navegación se utiliza para la localización de las transmisiones de radio y de los radares.

**APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO**

A continuación veremos el procedimiento para encontrar la distancia a la cual se deben colocar los extremos de un puente colgante si su longitud es igual al lado recto de una parábola cuyo punto medio se encuentra 10 m arriba de la carretera y su foco a 90 m de altura.

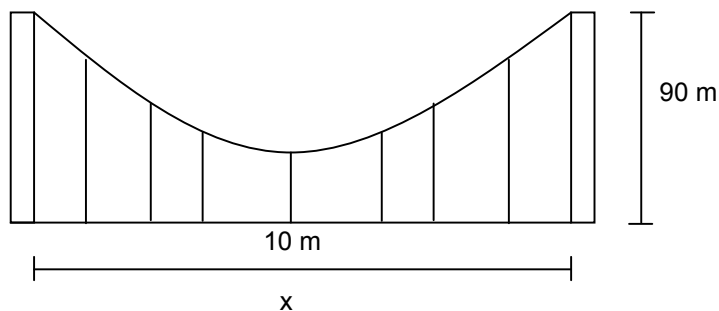
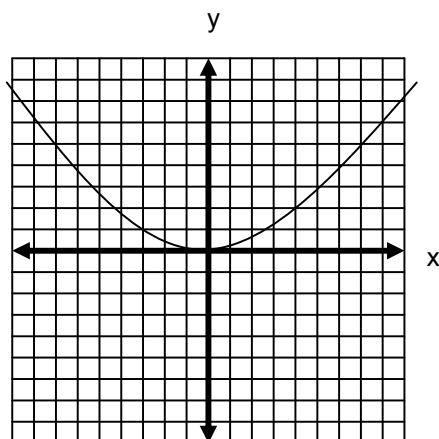


Figura 1

Paso 1

Ubicar la parábola en un plano cartesiano para localizar las coordenadas del vértice y foco.



Se trata de una parábola vertical que abre hacia arriba. Las coordenadas del vértice son  $V(0, 10)$  y las del foco,  $F(0, 90)$ .

Paso 2

Para encontrar el valor de  $p$ , si es la distancia del vértice al foco, de la gráfica observamos que es igual a 80.

Paso 3

Para calcular el valor del lado recto.

$$lr = |4p| = |(4)(80)| = 320$$

El valor del lado recto es 320; por lo tanto, la distancia a la cual se deben colocar los postes es de 320 m.



Ahora encontraremos la ecuación de la parábola en forma general.

Paso 1

Los datos del vértice  $V(0, 10)$  y de  $p = 80$  se sustituyen en la ecuación de la parábola vertical con vértice fuera del origen.

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(x - 0)^2 = 4(80)(y - 10)$$

$$x^2 = 320(y - 10)$$

Paso 2

Se desarrollan las operaciones del paréntesis y se iguala a cero.

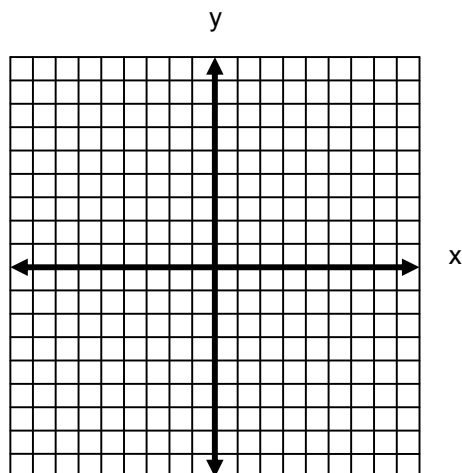
$$x^2 = 320(y - 10)$$

$$x^2 = 320y - 3200$$

$$x^2 - 320y + 3200 = 0$$

Ejercita tus conocimientos. Resuelve el siguiente problema y encuentra la ecuación de la parábola en forma general.

La superficie reflectora de un faro de luz que tiene la forma de una parábola mide 90 cm de diámetro y 30 cm de profundidad. Si la fuente de luz se debe colocar en el foco de la parábola, determina a qué distancia del vértice debe estar.

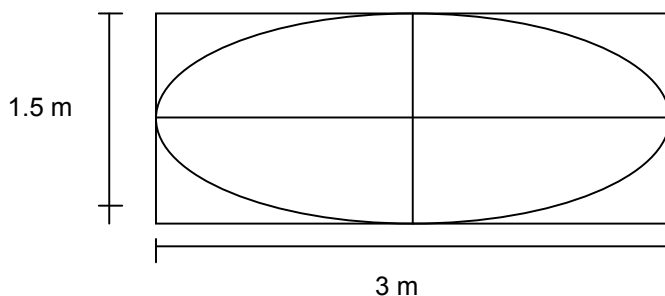


Nota: para poder calcular el valor de  $p$  ubica un punto sobre la parábola y sustitúyelo en la ecuación.

Analiza el siguiente ejemplo. Se desea fabricar una mesa elíptica a partir de una tabla de madera de 3m de largo por 1.5 m de ancho. ¿A que distancia se deben ubicar los focos para poder trazar la mesa y cuál es la ecuación en forma general de la elipse encontrada?

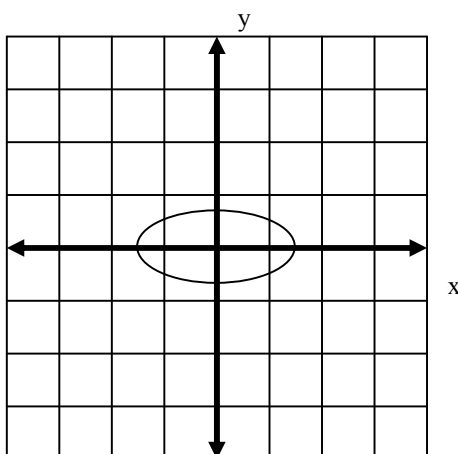
Paso 1

Se traza la gráfica para poder identificar la elipse.



Paso 2

Se ubica la elipse en el eje cartesiano, colocando el centro en el origen para determinar el valor de a y b.



Donde:

$$a = 1.5 \text{ y } b = 0.75$$

Paso 3

Se calcula el valor de  $c$  con la fórmula:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Despejando:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1.5^2 - 0.75^2} = \sqrt{2.25 - 0.5625} = \sqrt{1.6875} = 1.299$$

Por lo tanto, los focos se deben ubicar a 1.3 m del centro de la tabla para poder trazar la elipse.

Ahora encontraremos la ecuación de la elipse en forma general.

Paso 1

Como se trata de una elipse horizontal con centro en el origen se utiliza la fórmula:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se sustituyen los valores de a y b.

$$\frac{x^2}{1.5^2} + \frac{y^2}{0.75^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{2.25} + \frac{y^2}{0.5625} = 1$$

Paso 2

La ecuación se iguala a cero para pasar a la forma general.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2.25} + \frac{y^2}{0.5625} &= 1 \\ \frac{0.5625x^2 + 2.25y^2}{1.27} &= 1 \\ 0.56x^2 + 2.25y^2 &= 1.27 \\ 0.56x^2 + 2.25y^2 - 1.27 &= 0 \end{aligned}$$

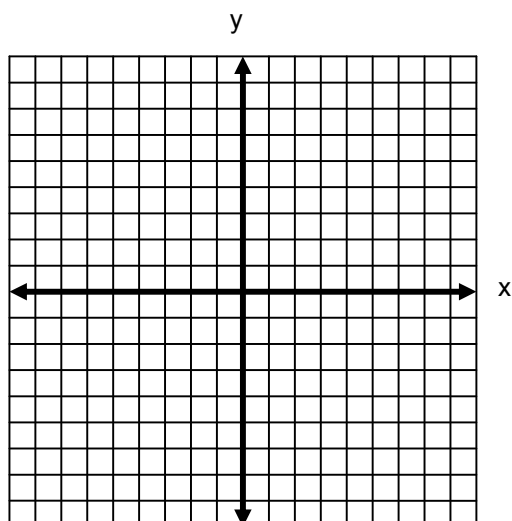
**Nota:** La circunferencia es un caso especial de la elipse, que se obtiene cuando ambos focos van juntándose hasta coincidir con el centro de la circunferencia y, por lo tanto, los semiejes son iguales entre sí y al radio de la circunferencia.

Ejercita tus conocimientos y resuelve el siguiente problema.

Se desea realizar una tapa semiesférica con una lámina que mide 4 m de largo por 3 m de ancho.

I. Determina en qué punto se deben ubicar el centro y radio de la circunferencia.

II. Realiza la gráfica.



III. Encuentra la ecuación de la circunferencia.

## EJERCICIOS

**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se te solicita.

1. Un avión de combate vuela a 6000 m de altura a una velocidad de 105 m/s. Si se lanza un proyectil en forma horizontal, su trayectoria está descrita por la fórmula  $x^2 = -\frac{2v^2}{g}y$

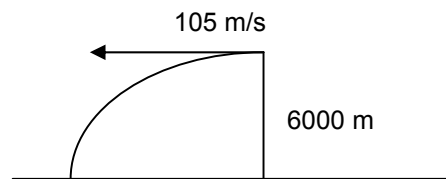
Donde:

$x$  = distancia horizontal.

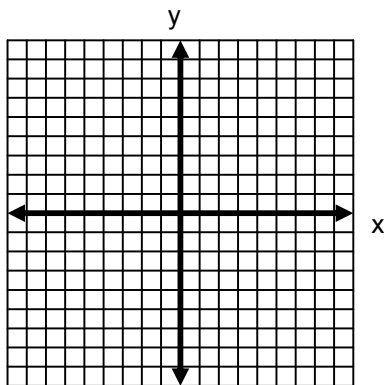
$y$  = altura de lanzamiento.

$v$  = velocidad.

$g$  = gravedad  $9.8 \text{ m/s}^2$   
de acuerdo con la figura.



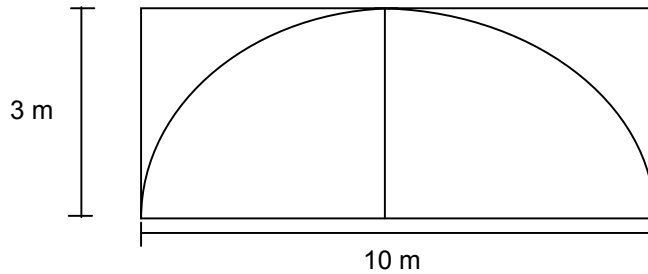
- I. Realiza la gráfica de la trayectoria descrita por el proyectil.



- II. Encuentra la ecuación de la parábola.

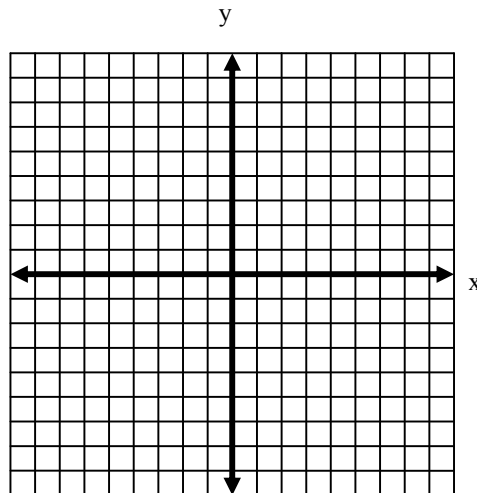
- III. ¿Cuál es la distancia horizontal a la cual cae el proyectil?

2. Se desea realizar un tapa de forma semielíptica para un reactor, para lo cual se cuenta con una lámina de 10 m de largo y 3 m de ancho, de acuerdo con la figura.



I. ¿A qué distancia se deben ubicar los focos de la semielipse para poder trazarla?

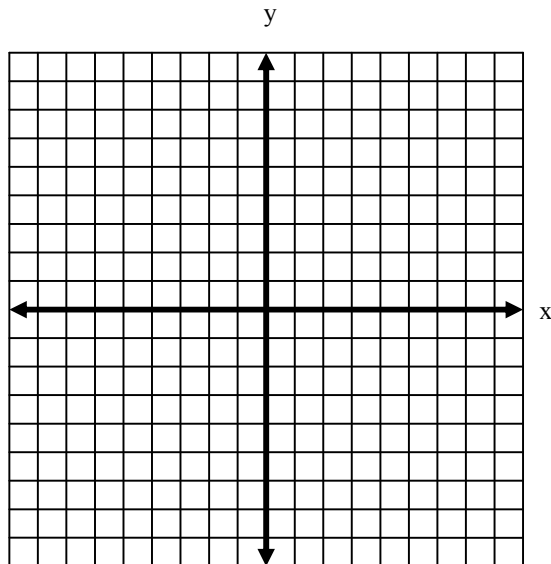
II. Realiza la gráfica de la elipse para localizar los focos.



III. ¿Cuál es la ecuación de la elipse en forma general?

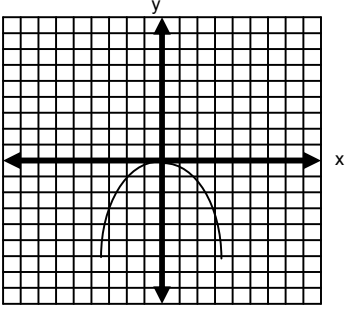
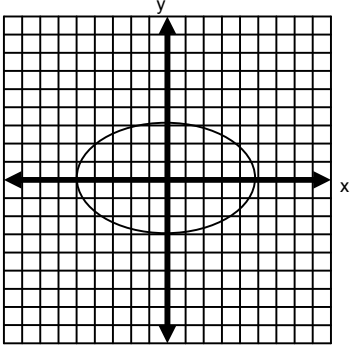
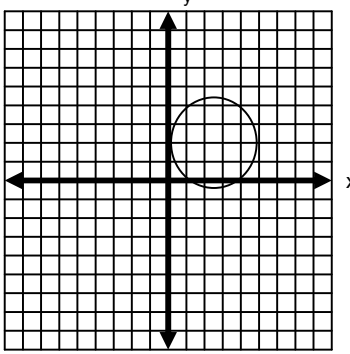
3. Se desea realizar una tapa circular con una lámina que mide 5 m de largo por 4.8 m de ancho.
- I. Indica en qué punto se deben ubicar, en el plano cartesiano, el centro y radio de la circunferencia.

- II. Ubica la circunferencia en el plano cartesiano para localizar las coordenadas correspondientes.



- III. Encuentra la ecuación de la circunferencia.

**TABLA DE COMPROBACIÓN**

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	<p>I. </p> <p>II. <math>x^2 = -2250y</math></p> <p>III. <math>x = 3674.2 \text{ m}</math></p>
2	<p>I. Los focos deben estar a 4 m del centro de la semielipse.</p> <p>II. </p> <p>III. <math>9x^2 + 25y^2 - 225 = 0</math></p>
3	<p>I. <math>C(2.5, 2.4)</math> y <math>r = 2.4</math></p> <p>II. </p> <p>III. <math>x^2 + y^2 - 5x - 4.8y + 6.25 = 0</math></p>
<b>Sugerencias</b>	
<p>Para realizar la gráfica de las curvas localiza el centro o el vértice en el origen del plano cartesiano.</p>	



## AUTOEVALUACIÓN

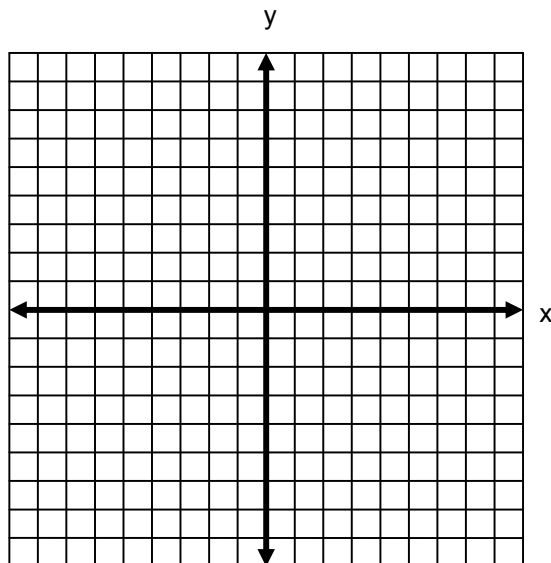
Para resolver estos ejercicios cuentas con 90 minutos.

**INSTRUCCIONES:** Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se te solicita.

1. Realiza la gráfica de la elipse indicando sus elementos (vértices, focos, eje mayor, eje menor y centro).

2. Sea una circunferencia cuyos extremos del diámetro son los puntos A (4, -7) y B (2, 3).

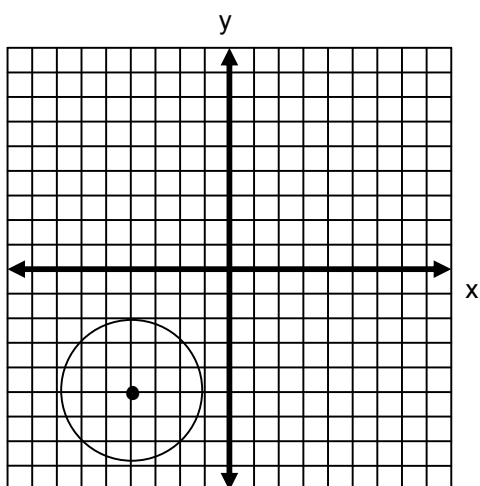
I. Realiza la gráfica.



II. Obtén la ecuación de la circunferencia encontrada.

3. Analiza la siguiente gráfica.

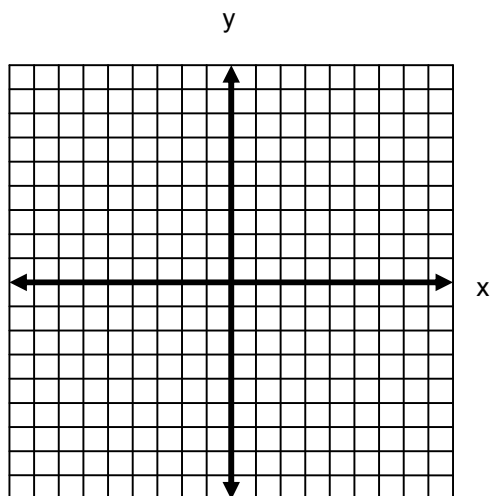
Obtén la ecuación de la circunferencia dada en forma general.



4. Sea una circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 1 = 0$ .

I. Encuentra el centro y radio.

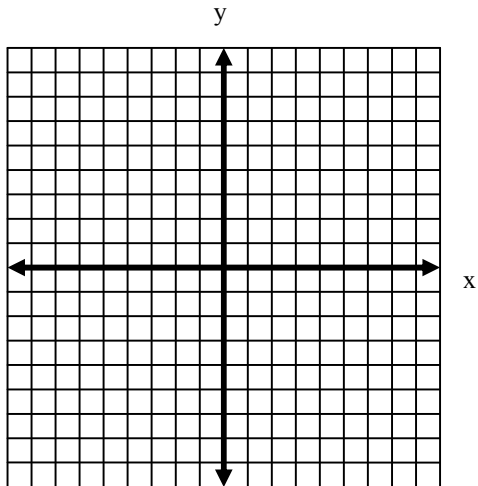
II. Realiza la gráfica.



5. Sea una parábola cuyo vértice es el punto  $V(1, 2)$  y el foco es  $F(1, -2)$ .

I. Realiza la gráfica.

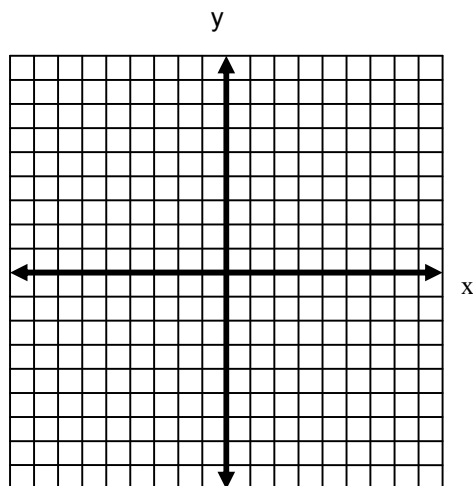
II. Encuentra la ecuación de la parábola en forma general.



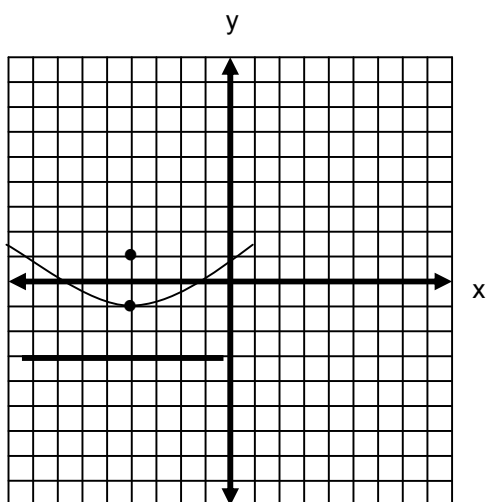
6. Sea la ecuación de la parábola en forma general  $y^2 + 4x - 10y + 33 = 0$

I. Encuentra las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto de la parábola.

II. Realiza la gráfica.



7. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz y lado recto de la parábola.

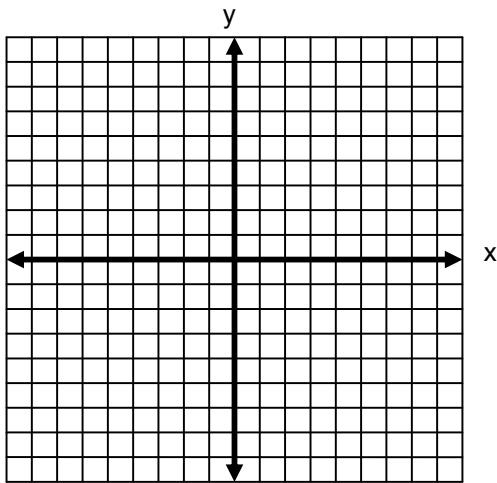
II. Encuentra la ecuación de la parábola en forma general.

8. Determina la cónica que representa la ecuación:  $5x^2 + 2xy^2 + 10y - 12x - 22y + 17 = 0$ .

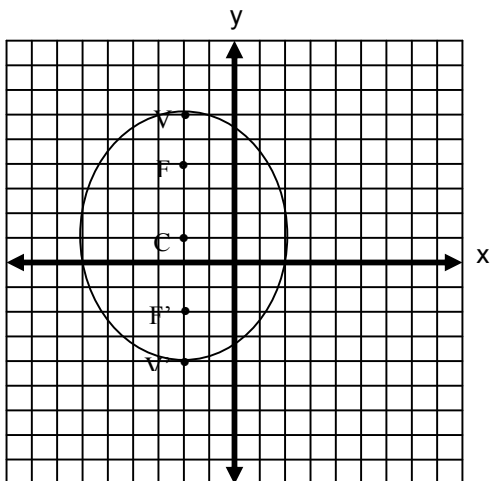
9. Sea una elipse con vértices en  $V(1, 1)$  y  $V'(7, 1)$  y excentricidad  $e = \frac{1}{3}$ .

I. Realiza la gráfica.

II. Obtén la ecuación de la elipse en forma general.



10. Analiza la siguiente gráfica.



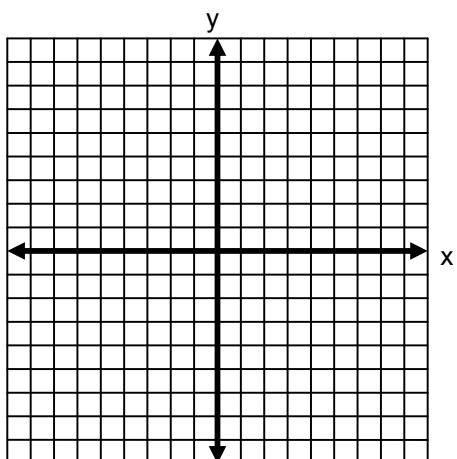
I. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y lado recto de la elipse.

II. Encuentra la ecuación de la elipse en forma general.

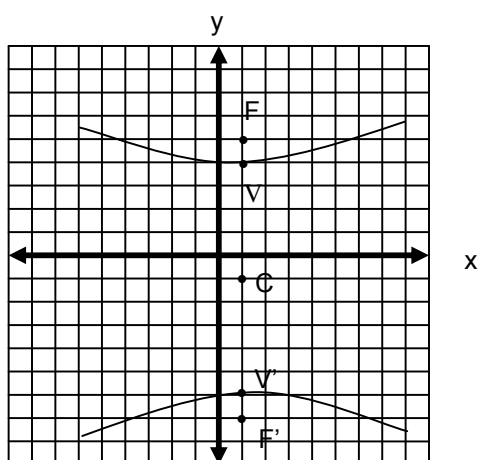
11. Sea una hipérbola con vértices  $V(-2, 3)$  y  $V'(-6, 3)$  y focos  $F(-1, 3)$  y  $F'(-7, 3)$ .

I. Realiza la gráfica.

II. Obtén la ecuación de la hipérbola en forma general.



12. Analiza la siguiente gráfica.



I. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y lado recto de la hipérbola.

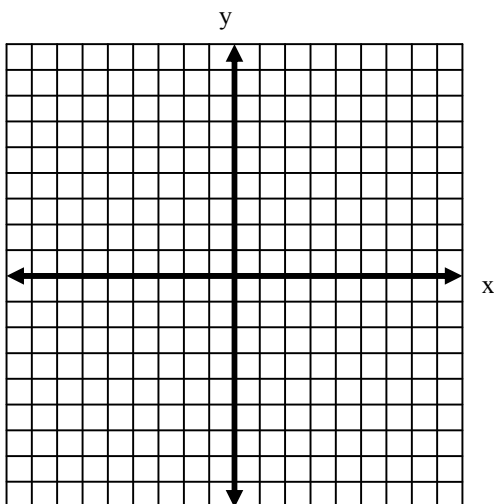
II. Encuentra la ecuación de la hipérbola en forma general.

13. Para atravesar una montaña se desea construir un túnel de forma semiéptica de 50 m de ancho y excentricidad  $e = \frac{3}{5}$ .

I. ¿A qué distancia se deben ubicar los focos de la semielipse para poder trazarla?

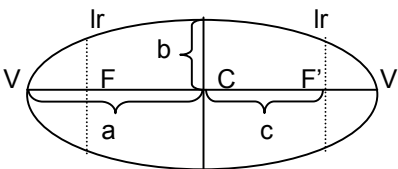
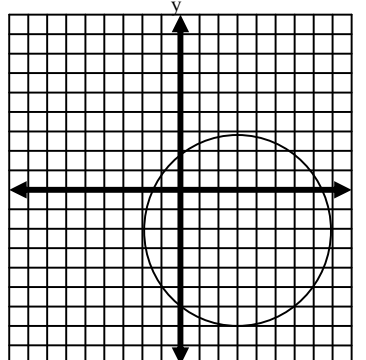
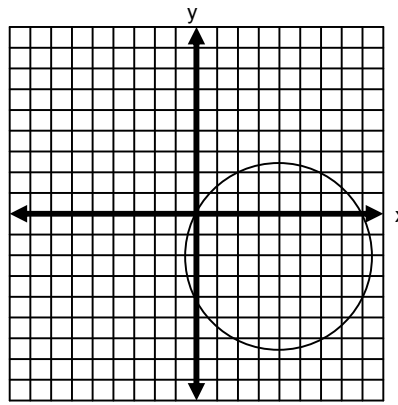
II. ¿Qué altura debe tener el túnel?

III. Realiza la gráfica de la elipse.

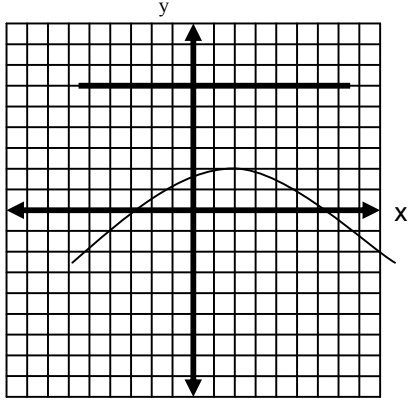
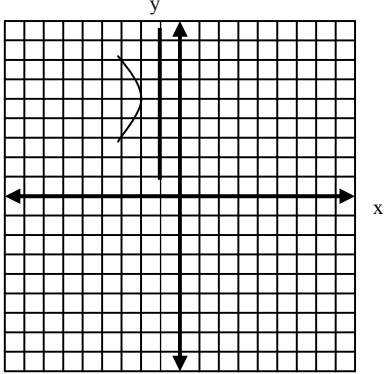


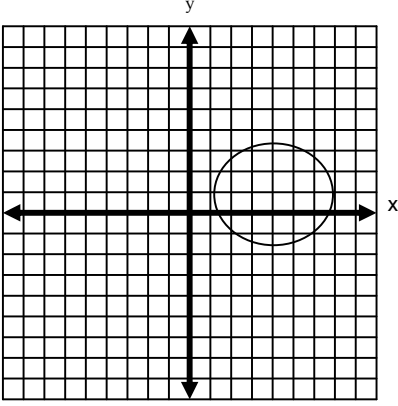
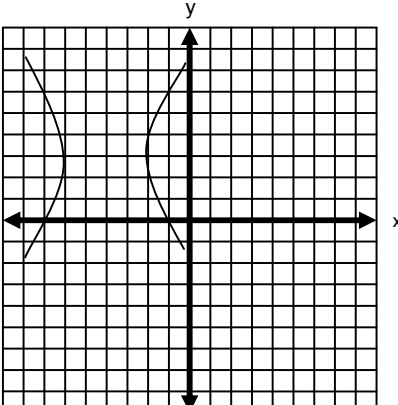
IV. ¿Cuál es la ecuación de la elipse?

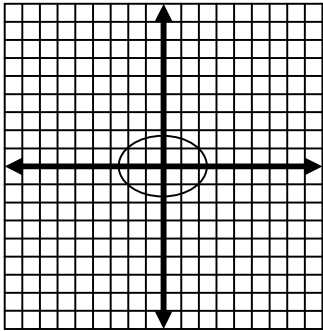
CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta
1	 <p> <math>a</math> = Semieje mayor.  <math>b</math> = Semieje menor.  <math>c</math> = Distancia del centro al foco.  <math>C</math> = Centro de la elipse.  <math>F</math> = Foco de la elipse.  <math>V</math> = Vértice de la elipse.  <math>lr</math> = Lado recto.                 </p>
2	<p>I.</p>  <p>II: <math>x^2 + y^2 - 6x + 4y - 13 = 0</math></p>
3	$x^2 + y^2 + 8x + 10y + 32 = 0$
4	<p>I. <math>C(4, -2)</math>  <math>r = \sqrt{19}</math></p> <p>II.</p> 



Número de pregunta	Respuesta
5	<p>I.</p>  <p>II: <math>x^2 - 2x + 16y - 31 = 0</math></p>
6	<p>I. V (-2, 5), F (-3, 5) Directriz <math>x = -1</math>, <math>lr = 4</math></p> <p>II.</p> 
7	<p>I. V (-4, -1), F (-4, 1) Directriz <math>y = -3</math>, <math>lr = 8</math></p> <p>II. <math>x^2 + 8x - 8y + 8 = 0</math></p>
8	<p>I = -196</p> <p>I &lt; 0 se trata de una elipse o circunferencia. Como <math>A \neq C</math>, se trata de una elipse.</p>

Número de pregunta	Respuesta
9	<p>I.</p>  <p>II. <math>8x^2 + 9y^2 + 64x + 18y + 65 = 0</math></p>
10	<p>I.</p> <p style="text-align: center;">C (-2, 1)</p> <p style="text-align: center;">V (-2, 6) y V' (-2, -4)</p> <p style="text-align: center;">F (-2, 4) y F' (-2, -2)</p> <p style="text-align: center;"><math>e = \frac{3}{5}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>lr = \frac{32}{5}</math></p> <p>II. <math>25x^2 + 16y^2 + 100x - 32y - 284 = 0</math></p>
11	<p>I.</p>  <p>II. <math>5x^2 - 4y^2 + 40x - 24y + 24 = 0</math></p>

Número de pregunta	Respuesta
12	<p>I.</p> <p style="text-align: center;"><math>C (1, -1)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>V (1, 4)</math> y <math>V' (1, -6)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>F (1, 5)</math> y <math>F' (1, -7)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>e = \frac{6}{5}, lr = \frac{22}{5}</math></p> <p>II: <math>25x^2 + 11y^2 + 50x - 22y - 289 = 0</math></p>
13	<p>I. A 15 m del centro de la semielipse.</p> <p>II. 20 m de altura.</p> <p>III.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>IV. <math>400x^2 + 625y^2 - 250000 = 0</math></p>



## BIBLIOGRAFÍA

1. FUENLABRADA, *Matemáticas III, Geometría Analítica*, McGraw-Hill, México, 1995, 327 pp.
2. GECHTMAN, MURRIA, *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Limusa, México, 1996, 699 pp.
3. GUERRA TEJADA, MANUEL y SILVIA FIGUEROA CAMPOS: *Geometría Analítica*, McGraw-Hill, México, 1992, 327 pp.
4. LEHMANN CHARLES H., *Geometría analítica*, Limusa, México, 1995, 494 pp.
5. MARTÍNEZ AGUILERA, MIGUEL ANGEL: *Matemáticas III, Geometría Analítica*, McGraw-Hill, México, 1996, 191 pp.
6. SÁNCHEZ DOMÍNGUEZ, VÍCTOR ALFONSO: *Matemáticas 4*, Colección Nuevo Rumbo, México, 1997, 219 pp.
7. SWOKOWSKI, EARL W: *Álgebra Y Trigonometría Con Geometría Analítica*, Grupo editorial Iberoamérica, México, 1988, 644 pp.

### SUGERENCIAS PARA PRESENTAR EXÁMENES DE RECUPERACIÓN O ACREDITACIÓN ESPECIAL

Para evitar cualquier contratiempo al presentar el examen de recuperación o acreditación especial debes considerar las siguientes recomendaciones:

#### **Organización:**

- Preséntate al menos con 10 minutos de anticipación al salón indicado. Debes presentarle al profesor aplicador, esta Guía resuelta.
- Lleva el comprobante de inscripción al examen y tu credencial actualizada.
- Lleva dos lápices del No. 2 o 2 ½.
- No olvides una goma que no manche.

#### **Durante el examen:**

- Lee con atención tanto las instrucciones como las preguntas y si tienes alguna duda consúltala con el aplicador.
- Contesta primero las preguntas que te parezcan “fáciles” y después concentra toda tu atención en las “difíciles”.
- Si te solicitan explicar o desarrollar algún tema, identifica las ideas principales que quieras exponer y escríbelas de la manera más concreta y clara que puedas, evita el planteamiento de ideas innecesarias.
- Escribe tus respuestas con letra clara, legible y sin faltas de ortografía.
- Al terminar de contestar el examen, revísalo nuevamente para asegurarte que todas las preguntas estén contestadas.
- Centra tu atención en el examen, no trates de copiar, recuerda que el compañero de junto puede estar equivocado.

La Guía para presentar exámenes de  
Recuperación o Acreditación especial de  
**Matemáticas IV**  
*(versión preliminar)*  
se terminó de reimprimir en el mes de octubre de 2006  
en los talleres del Colegio de Bachilleres.  
Prolongación Rancho Vista Hermosa 105  
Col. Ex Hacienda Coapa.  
México, D.F. 04920

El tiraje fue de 633 ejemplares  
más sobrantes para reposición