Matemáticas IV

4° SEMESTRE

8 CRÉDITOS

▪ Índice

Introducción GENERAL

La comprensión de las Matemáticas te brinda las herramientas para interpretar el entorno a través de la cuantificación, medición y descripción por medio de ecuaciones y funciones. Una vez que se entiende un concepto matemático, el entorno se mirará de manera diferente. Las aplicaciones matemáticas se pueden observar en cada aspecto de la vida diaria, en la cuenta de las compras, en la construcción de edificios, en los registros de las calificaciones de los estudiantes, en la evolución de una enfermedad, en el desarrollo de avances científicos, entre otros.

Particularmente, la asignatura de Matemáticas IV tiene como propósito que apliques la variación lineal y no lineal en la implementación de estrategias de análisis y solución de diferentes problemas, para desarrollar proyectos y ampliar su capacidad de modelar situaciones de cambio tanto en matemáticas como en otras ciencias que aborden procesos predictivos.

Para lo anterior, tendrás que hacer uso de los aprendizajes previos obtenidos en tus cursos de álgebra y geometría, así como los de otras asignaturas que te apoyarán en la mejor comprensión de los contenidos que se te presentarán.

Este material constituye un apoyo para el momento de contingencia que se está viviendo actualmente y tiene la intención de contribuir a que logres adquirir los aprendizajes comprendidos únicamente en el corte **2** y **3** de la asignatura de Biología I, por lo que te recomendamos revisar tus apuntes y trabajos correspondientes al corte 1.

Es recomendable que al momento de estudiar atiendas las siguientes recomendaciones:

- Reduce o elimina las distracciones
- Dedica un tiempo exclusivo para el estudio
- Designa un espacio particular para tu estudio
- Organiza cuáles serán los temas que vas a estudiar
- Realiza anotaciones y sigue los procedimientos de manera activa, es decir, reprodúcelos y compruébalos por tu cuenta
- Anexa hojas si lo consideras necesario
- Para la realización de las gráficas, apóyate en hojas cuadriculadas.
- Ten a la mano una calculadora científica y explórala con el fin de conocer su funcionamiento
- Si se te presentan dudas, repasa el contenido o consulta el material recomendado en la sección ¿Quieres conocer más?
- Comprueba tus resultados en la sección Tabla de verificación, en caso de no coincidir, sigue las recomendaciones que se te indican

Corte de aprendizaje

CORTE 2

Funciones Polinomiales básicas

Propósito

Al finalizar este corte analizarás las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas) y las representarás gráficamente, para que identifiques, relaciones y representes las variables de un fenómeno y apliques procedimientos algebraicos de las funciones polinomiales en el estudio y solución de problemas en tu contexto.

Contenido especifico	**Aprendizajes esperados**
Funciones polinomiales básicas	❖ Realizarás operaciones algebraica y aritméticamente, representarás y tratarás gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).

Conocimientos PREVIOS

Para que logres desarrollar los aprendizajes esperados correspondientes al corte 2 es importante que reactives los siguientes conocimientos:

- Leyes de los exponentes
- Elementos de términos algebraicos: coeficiente, base y exponente.
- Suma y resta de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- División de polinomios
- Factorización de polinomios
- Sistema de coordenadas cartesianas
- Concepto de función
- Dominio y contradominio de funciones
- Evaluación de funciones

Es importante que revises tus apuntes, la bibliografía y recursos que te hayan recomendado tus profesores para el corte 1.

Contenidos

A continuación, encontrarás una síntesis de las principales categorías y conceptos que debes de manejar para el corte 2.

Funciones Polinomiales

Las funciones polinomiales $f(x)$ son aquellas cuya expresión es un polinomio. Una función polinomial de grado n se pueden reconocer con la siguiente expresión:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

El dominio de las funciones polinomiales es todo el conjunto de los números reales y estas son continuas en todo su dominio.

Existen muchos tipos de funciones polinómicas, entre las más comunes se encuentran: **funciones de primer grado o lineales, funciones de segundo grado o cuadráticas y funciones de tercer grado o cúbicas**.

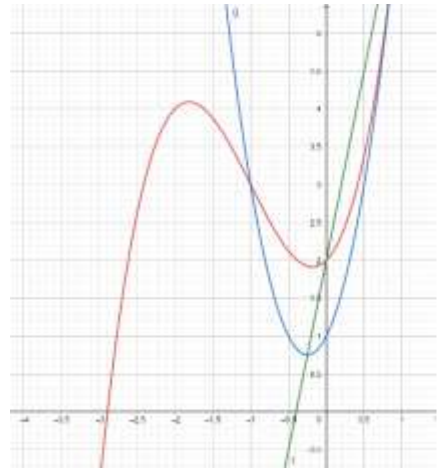
El grado de las funciones polinomiales estará dado por el mayor de los exponentes que se encuentren en su expresión.

De la siguiente función se puede decir que es una función de tercer grado, ya que el exponente más grande es tres, además es una función con cuatro términos.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$$

Observa la forma de la expresión y de la gráfica según el grado al que corresponde:

- Función de primer grado: $f(x) = 5x + 2$
- Función de segundo grado: $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$
- Función de tercer grado: $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$



Función lineal

La función lineal es un caso particular de las funciones polinomiales, por eso se le nombran también funciones polinomiales de primer grado, su expresión es:

$$f(x) = a_0 + a_1x$$

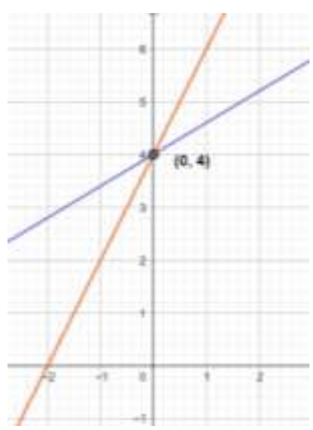
Comúnmente también se reconoce de la siguiente forma:

$$f(x) = mx + b$$

Donde:
m: pendiente de la recta
b: intersección con el eje y u ordenada al origen

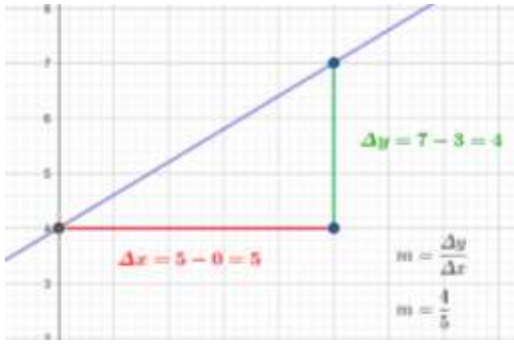
Ambos términos, son muy útiles para graficar una función lineal, ya que $\boldsymbol{b}$, es el valor de la ordenada del punto de corte de la recta con el eje vertical.

Las gráficas de las funciones: $f(x) = 2x + \mathbf{4}$ y $g(x) = \frac{3}{5}x + \mathbf{4}$ son:

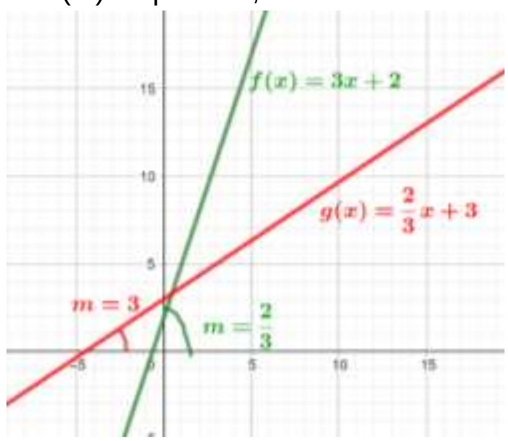


Se puede observar en la gráfica que ambas funciones cruzan el eje vertical en 4, es decir, como el valor de su término independiente, por lo que al observar la ecuación de una función lineal se puede reconocer un punto de la gráfica.

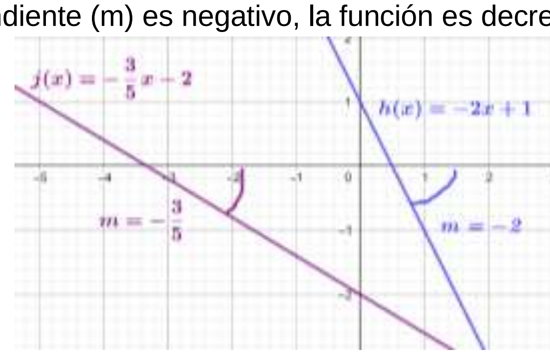
En cuanto a la pendiente m, es la medida de la inclinación de la recta y se puede interpretar como: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



- Si el valor de la pendiente (m) es positivo, la función es creciente

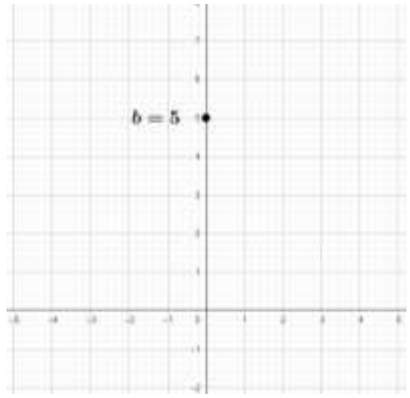


- Si el valor de la pendiente (m) es negativo, la función es decreciente



Si tienes un punto que es parte de la recta y conoces el valor de la pendiente, es muy fácil poder graficar la trayectoria de la recta. Por ejemplo, con $f(x) = -3x + 5$, la expresión de la función proporciona ambos datos m y b, la ordenada al origen $b = 5$, que al ser la ordenada donde la recta corta el eje vertical, es un punto de la recta, con coordenadas (0, 5) y la pendiente $m = -3$.

Inicialmente se grafica la ordenada al origen $b = 5$, recuerda que es el punto en donde la recta cruza el eje vertical.



A partir de ese punto se grafica la pendiente, ten en cuenta la definición de la pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En este ejemplo, la pendiente tiene un valor entero y negativo, recuerda que los valores enteros pueden expresarse como razones, con denominador uno, y el signo negativo se asigna solo a uno de los dos términos, al numerador o al denominador.

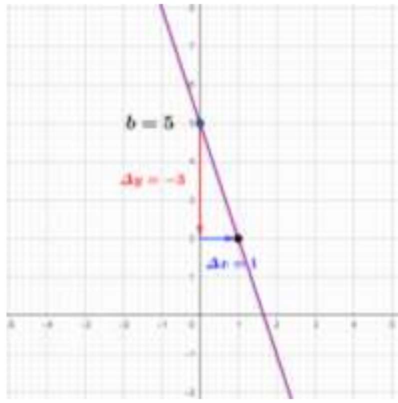
$$m = -3$$

Se transforma en:

$$m = \frac{-3}{1}$$

Lo anterior significa que, a partir del punto identificado, el desplazamiento vertical será de tres hacia abajo, por ser negativo. Después se desplazará uno hacia la derecha por ser positivo. Como se muestra a continuación:

Encontrándose así un segundo punto de la recta, que al unirse con el primero permite definir la trayectoria de la función analizada.



Las características principales de una función lineal son:

- Su gráfica es una recta
- Crecimiento proporcional
- El dominio y el rango de las funciones lineales están definidos para todo el conjunto de los números reales.
- Es continua en todo su dominio

En el siguiente ejemplo podrás ver cómo puedes aplicar una función lineal en la solución de un problema.

Un capturista recibe \$36 diarios y por cada página capturada tiene una comisión de \$3. [1]

a) Estable la regla de correspondencia
b) Si el lunes entregó 15 páginas, el martes 18, el miércoles 20, el jueves 22 y el viernes 23, ¿Cuánto ganó cada día?
c) Relaciona el número de páginas con el sueldo por día y elabora una gráfica.

Solución

a) La regla de correspondencia está dada por:

$$Sueldo\ fijo\ por\ día\ (F)\ =\ \$\,36.00$$
$$Comisión\ por\ cada\ página\ (C)\ =\ \$\,3.00$$
$$Número\ de\ páginas\ por\ día\ =\ p$$
$$Sueldo\ total\ por\ día\ =\ T$$
$$Sueldo\ total\ por\ día\ =\ sueldo\ fijo\ por\ día\ +\ (comisión\ por\ página)(número\ de\ páginas).$$

La regla de correspondencia es:

$$T\ =\ F\ +\ Cp$$

Pero no olvidemos que F y C son constantes, y al sustituirlas queda:

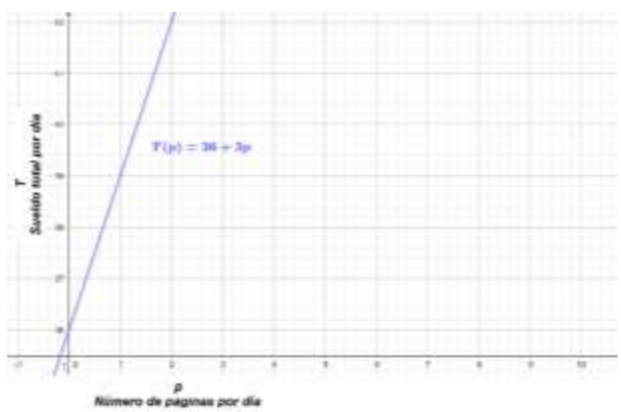
[1] Tomado de Colegio de Bachilleres. 2001. Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas II, pag. 8. https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/mate_II.pdf

$$T = 36 + 3p$$

b) La siguiente tabla muestra el sueldo total por día en función del número de páginas capturadas.

Número de páginas por día p	Regla de correspondencia $T = 36 + 3p$	Sueldo total por día T
15	$36 + 3(15)$	81
18	$36 + 3(18)$	90
20	$36 + 3(20)$	96
22	$36 + 3(22)$	102
23	$36 + 3(23)$	105

c) Gráfica de la función



Función cuadrática[2]

En esta sección se analizará la función cuadrática, la cual es un caso particular de la función polinomial, y cuya gráfica es una parábola. La expresión algebraica para estas funciones es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

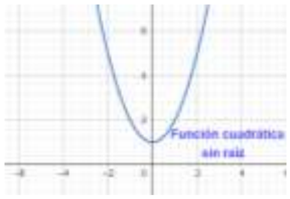
Siendo $a \neq 0$

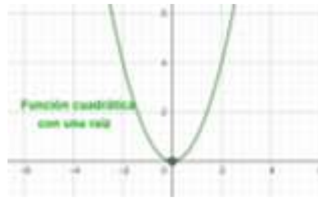
El dominio de las funciones cuadráticas son el conjunto de los números reales, su contradominio depende de la orientación que tenga la función.

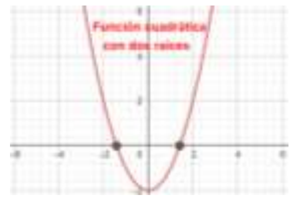
Al ubicar una función cuadrática en un sistema de ejes coordenados, se puede observar:

[2] Adaptado de Colegio de Bachilleres. 2001. Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas II, p. 39.

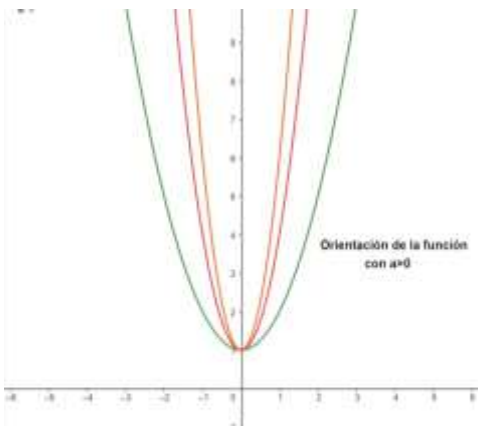
- Existe dos cortes con el eje de las abscisas x, denominadas raíces, cuyas coordenadas son $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Algunas funciones solo tienen una raíz o ninguna.

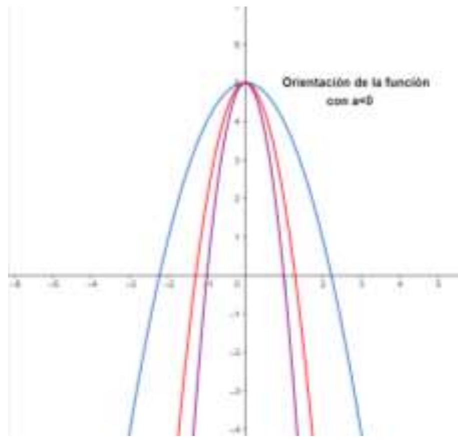




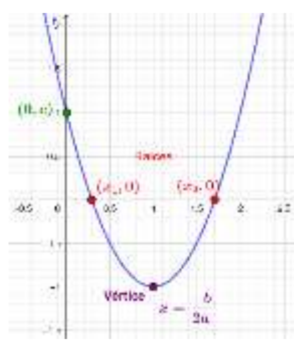


- Considerando el valor de a, la parábola puede cambiar de orientación





- Un corte con el eje de las ordenadas, con coordenadas $(0, c)$.
- Dependiendo de la orientación que tenga la parábola, el vértice de la función será un punto máximo o mínimo. Para encontrar el valor de la abscisa del vértice, se utiliza la expresión: $x = -\frac{b}{2a}$



Existen diversas maneras de determinar el valor de las abscisas de las raíces de una función cuadrática, pero uno de los más comunes es el uso de la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ se extraen de la expresión de la función cuadrática:

$$f(x) = \boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}$$

Recuerda que $\boldsymbol{a}$ es el coeficiente del término cuadrático, $\boldsymbol{b}$ el coeficiente del término lineal y $\boldsymbol{c}$ es el valor del término independiente, en caso de que no exista termino lineal o término independiente, el valor de $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ serían cero respectivamente.

Ejemplo[3]

El defensa de un equipo de fútbol soccer realiza un saque de meta, de manera que la trayectoria que describe el balón está representada por la función:

$$h\,(t) = \ 10t - 5t^2$$

Donde:
h: la altura que alcanza el balón en su trayectoria
t: es el tiempo del recorrido del balón

a) Determina cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente.
b) Elabora la gráfica de la función
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?

Solución

a) Al analizar la situación y la función planteada en el problema, se puede ver que la altura es la que depende del tiempo, por lo que:
   Variable independiente: t, tiempo en segundos
   Variable dependiente: h, altura en metros

b) Elabora la gráfica de la función
   Para poder determinar la gráfica de la función, es útil determinar las raíces y la ubicación del vértice.

- Raíces de la función

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De la función $h\,(t) = \ 10t - 5t^2$ se analiza:

$a = -5$
$b = 10$

---

[3] Ibidem

$c = 0$, porque la expresión de la función no tiene término independiente

Entonces:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-5)(0)}}{2(-5)}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 0}}{-10}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100}}{-10}$$
$$x = \frac{-10 \pm 10}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-10 + 10}{-10} \qquad x_2 = \frac{-10 - 10}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-0}{-10} \qquad x_2 = \frac{-20}{-10}$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

Lo cual se puede interpretar como que en el segundo 0 y en el segundo 2, el balón se encuentra a $0\ m$ de altura, es decir, cuando inicia y termina su trayectoria.

- Vértice de la función

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Recuerda que los valores de a y b se extraen de la expresión de la función cuadrática que se analiza. En este caso: $\boldsymbol{h(t) = 10t - 5t^2}$

$$a = -5$$
$$b = 10$$

Sustituyendo en la expresión:

$$x = -\frac{10}{2(-5)}$$
$$x = -\frac{10}{-10}$$
$$x = 1$$

Ahora, este valor se sustituye en la función para obtener la ordenada del vértice.

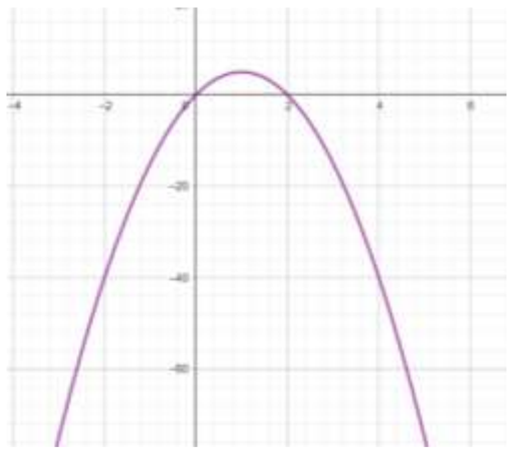
$$h(t) = 10t - 5t^2$$
$$h(1) = 10(1) - 5(1)^2$$
$$h(1) = 10 - 5$$
$$h(1) = 5$$

Por lo anterior, las coordenadas del vértice son (1, 5)

Para que en la gráfica se logren ver el comportamiento de la función alrededor del vértice y las raíces, estos valores se toman en cuenta.

Dominio $\boldsymbol{t}$	**Regla de correspondencia** $\mathbf{10}\boldsymbol{t}-\mathbf{5}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}$	**Contradominio** $\boldsymbol{h}$
-2	$10(-2)-5(-2)^2$	-40
-1	$10(-1)-5(-1)^2$	-15
0	$10(0)-5(0)^2$	0
1	$10(1)-5(1)^2$	5
2	$10(2)-5(2)^2$	0
3	$10(3)-5(3)^2$	-15

Por lo que la gráfica queda:



c) La altura máxima se calcula a partir de la abscisa del vértice.
Como las coordenadas del vértice son (1, 5), estos datos significan que, el alcanza su altura máxima que son 5 m, cuando ha transcurrido un segundo de su trayectoria.

NOTA: Las coordenadas del vértice y de las raíces que se determinaron analíticamente, es posible que los contrastes con la gráfica realizada.

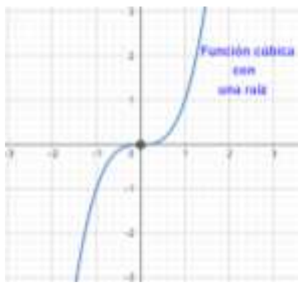
Función cúbica

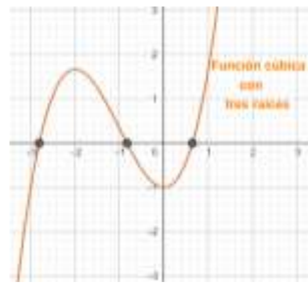
Una función cúbica o de tercer grado, es una función polinómica que tiene como mayor exponente en su expresión el 3.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Con $a \neq 0$

Las funciones cúbicas pueden tener una, dos o tres intersecciones con el eje de las abscisas, las cuales se les conoce como raíces.





El dominio y el rango de las funciones cúbicas es el conjunto de los números reales.

Las funciones cúbicas tienen un comportamiento gráfico que depende del valor del coeficiente del término cúbico.

Puedes observar la forma que se genera cuando el valor de a cambia de signo, lo cual es muy útil cuando se realiza la gráfica, ya que sirve de guía para iniciar.

Además, las funciones polinomiales tienen características gráficas bien definidas, que se resumen en la siguiente tabla.

Grado de la función	Número de veces que la función…		
	Asciende	Desciende	Total
Primer	0	1	1
	1	0	1
Segundo	1	1	2
Tercer	1	2	3
	2	1	3

Nota: En las funciones de primer y de tercer grado pueden tener uno u otro de los comportamientos presentados en la tabla.

Para conocer el comportamiento gráfico de una función cúbica, se recomiendan los siguientes pasos:

1. Establecer el comportamiento de la función.
2. Determinar la intersección con el eje x (raíces o ceros de la función, $f(x) = 0$).
3. Tabulación de la función, para saber si los puntos están arriba o abajo del eje x.
4. Realizar la gráfica.

Ejemplo:
Obtener la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 9x$

Solución:

1. Establecer el comportamiento de la función
   Al analizar la función se puede apreciar que el coeficiente a del término de tercer grado es 1, es decir $a > 0$, por lo que se puede concluir que la gráfica tendrá aproximadamente la siguiente forma:

2. Determinar la intersección con el eje x (raíces o ceros de la función, $f(x) = 0$).

   Para poder encontrar los ceros de la función, ésta se igualará a cero:
   $$x^3 + 9x = 0$$
   Se factorizará por medio del factor común, ya que ambos términos se están multiplicando por x.

   $$x(x^2 + 9) = 0$$
   Hay dos maneras para que esta multiplicación tenga como resultado cero, que el factor $x = 0$ o que el factor $(x^2 + 9) = 0$ y esta última condición se cumple cuando:

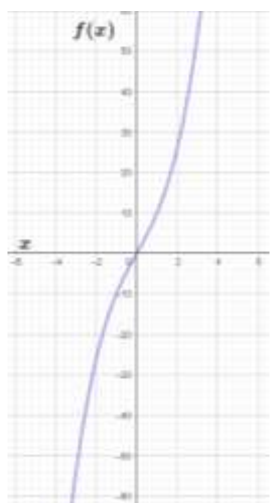
   $$x^2 + 9 = 0$$
   $$x^2 = -9$$
   $$x = \pm\sqrt{-9}$$

   Como las raíces cuadradas de los números negativos, están fuera de los números reales, la única raíz que tiene esta función es $x = 0$. Es decir, la función cruzará el eje de las abscisas en el punto $(0, 0)$

3. Tabulación de la función, para saber si los puntos están arriba o abajo del eje x.
   Se sugiere que en la tabulación se consideren valores cercanos a los ceros de la función, en este caso, cercanos del cero.

x	$f(x) = x^3 + 9x$	$f(x)$	$(x, f(x))$
-3	$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)$	-54	(-3, 54)
-2	$f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)$	-26	(-2, -26)
-1	$f(-1) = (-1)^3 + 9(-1)$	-10	(-1, -10)
1	$f(1) = (1)^3 + 9(1)$	10	(1, 10)
2	$f(2) = (2)^3 + 9(2)$	26	(2, 26)
3	$f(3) = (3)^3 + 9(3)$	54	(3, 54)

4. Grafica la función



Como se puede apreciar en la gráfica, la orientación de la curva coincide con la predicción que se hizo con base en el coeficiente del término de tercer grado, los ceros de la función coinciden con lo calculado. Estos primeros pasos ayudan a que la tabulación no necesite tantos puntos para poder graficar la función.

Operaciones con funciones

Al igual que con los números, es posible combinar las funciones a través de operaciones como la suma, multiplicación y división. Dadas las funciones f y g, definidas para un mismo dominio:

- Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Diferencia: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Cociente: $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, donde\ g(x) \neq 0$

Lo anterior se ilustra con algunos ejemplos:

Sean: $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ y $g(x) = x^2 + 1$

Determina:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  $(f+g)(x) = (3x^2 + 2x - 4) + (x^2 + 1)$
  $(f+g)(x) = 4x^2 + 2x - 3$

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
  $(f-g)(x) = (3x^2 + 2x - 4) - (x^2 + 1)$
  $(f-g)(x) = 2x^2 + 2x - 5$

- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
  $(f \cdot g)(x) = (3x^2 + 2x - 4)(x^2 + 1)$
  $(f \cdot g)(x) = 3x^4 + 3x^2 + 2x^3 + 2\,x - 4x^2 - 4$
  $(f \cdot g)(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2\,x - 4$

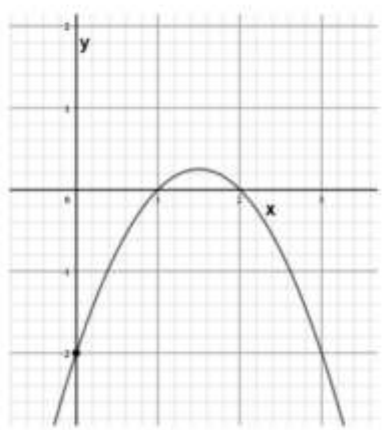
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
  $\frac{f}{g}(x) = \frac{3x^2+2x-4}{x^2+1}$, con $x \neq \pm 1$, ya que con estos valores el denominador vale 0.

En esta sección desarrollarás actividades que te permitirán ejercitar los aprendizajes esperados**.**

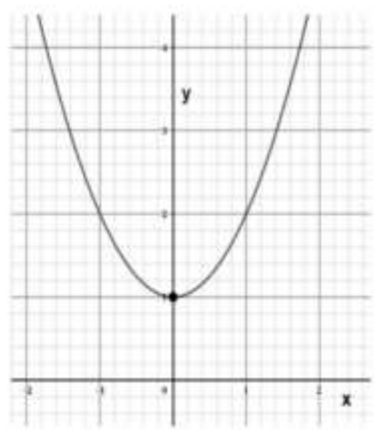
Actividad 1[4]

Relaciona cada una de las siguientes funciones polinomiales con la gráfica correspondiente.

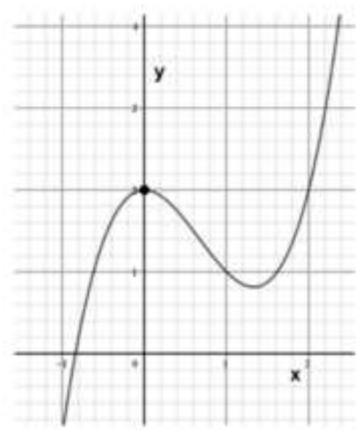
1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
2) $f(x) = -x^2 - 3x - 2$
3) $f(x) = 2x^4$
4) $f(x) = -x^3 + 2x - 1$
5) $f(x) = x^2 - 2x + 3$



a)

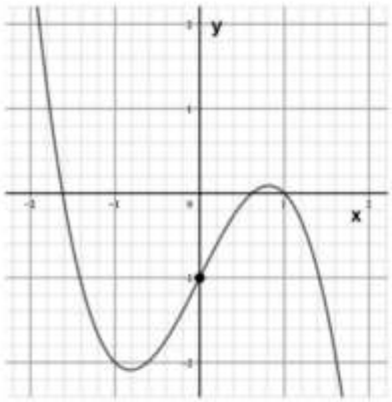


b)

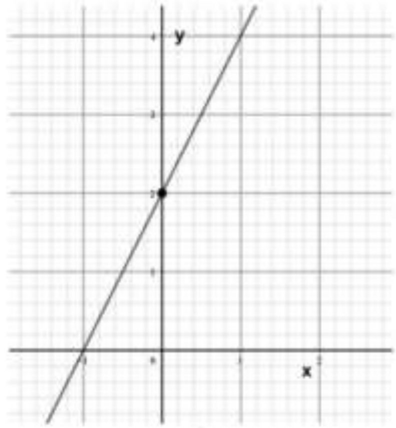


c)

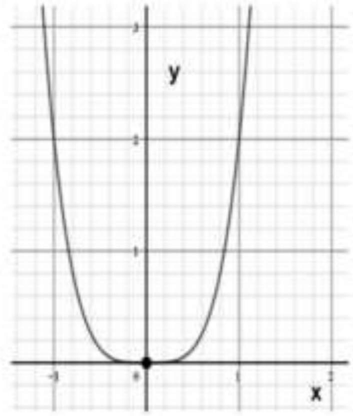
[4] Tomado de Colegio de Bachilleres, Plantel 8 Cuajimalpa, 2019, Guía para el examen de Matemáticas IV, p.p. 8,9



d)



e)



f)

Actividad 2[5]

Grafica las siguientes funciones polinomiales de primer grado, considerando los datos que se proporcionan

Función	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{b}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	-2
$g(x)$	2	2
$h(x)$	$\frac{3}{4}$	-1
$i(x)$	-2	4
$j(x)$	$\frac{2}{3}$	3

[5] Adaptado Ibidem

Nota: Para la realización de las gráficas, te puedes apoyar en hojas cuadriculadas.

Actividad 3

Grafica las siguientes funciones

1. $f(x) = -3x^2 - 4x + 5$
2. $g(x) = 5x^2 + 7x - 3$
3. $h(x) = -x^2 - 3$
4. $i(x) = 2x^2 - 5$
5. $j(x) = -4x - 3$

Actividad 4

Realiza la gráfica de las siguientes funciones. Considera los pasos que se te sugieren.

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

Actividad 5[6]

Realiza las operaciones que se te solicitan en cada caso.

1. Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 2x - 1$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$

[6] Ibidem

2. Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 4$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$
   d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

3. Sean $f(x) = x - 5$ y $g(x) = \frac{5}{x-1}$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$
   d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

4. Sean $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 2x - 4$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$

5. Sean $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = x + 3$
   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$
   d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

¿QUIERES CONOCER MÁS?

Tiene como propósito presentarte recomendaciones de textos que le permitan consultar o estudiar de manera organizada, todos los contenidos específicos de la guía.

- Video que explica la representación de funciones polinómicas básicas. https://www.youtube.com/watch?v=7lvZ1IRqLTU
- Ejemplos y ejercicios con funciones https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:average-rate-of-change/v/introduction-to-average-rate-of-change
- Evaluación de funciones https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:evaluating-functions/v/what-is-a-function
- Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Cengage Learning. Méndez H. A. (2006). Matemáticas IV. México: Santillana.
- Becerril, R., Jardón, D., Reyes, J. (2002). *Precálculo.* México: UAM-Iztapalapa.
- Méndez H. A. (2006). *Matemáticas IV*. México: Santillana.
- Cuéllar Carvajal, J. A. (2006) Matemáticas IV Relaciones y Funciones. México: Mc Graw Hill.

Fuentes CONSULTADAS

- Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Cengage Learning. Méndez H. A. (2006). Matemáticas IV. México: Santillana.
- Becerril, R., Jardón, D., Reyes, J. (2002). *Precálculo.* México: UAM-Iztapalapa.
- Méndez H. A. (2006). *Matemáticas IV*. México: Santillana.
- Cuéllar Carvajal, J. A. (2006) Matemáticas IV Relaciones y Funciones. México: Mc Graw Hill.
- Guía para el examen de Matemáticas IV. 2019. Colegio de Bachilleres, Plantel 8 Cuajimalpa. https://drive.google.com/file/d/10Usemj2hFtX0eB35BZNHTXi6nnUz3LhX/view
- Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Matemáticas II. Colegio de Bachilleres, 2001. https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/mate_II.pdf

Corte de aprendizaje

CORTE 3

La derivada

Propósito

Al finalizar este corte podrás determinar las derivadas y derivadas sucesivas de funciones algebraicas y trascendentes.

Contenido especifico	Aprendizajes esperados
Reglas de derivación	❖ Utilizarás procesos para la derivación .

Conocimientos PREVIOS

Para que logres desarrollar los aprendizajes esperados correspondientes al corte 3 es importante que reactives los siguientes conocimientos:

- Leyes de los exponentes
- Elementos de términos algebraicos: coeficiente, base y exponente.
- Suma y resta de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- División de polinomios

Contenidos

A continuación, encontrarás información relevante sobre los aprendizajes esperados planteados para este corte.

Reglas de derivación[7]

Las derivadas de las funciones se pueden determinar de su definición como límite de una función. Este procedimiento requiere de la aplicación de un amplio dominio de reglas y procedimientos algebraicos, lo cual puede resultar en un procedimiento largo y difícil, por lo anterior se darán algunas reglas o teoremas que permitirán calcular la derivada de funciones algebraicas sin usar directamente los límites. Dichas reglas son las siguientes:

1. Reglas de la constante. La derivada de una constante es cero.
$$\frac{d}{dx}C = 0$$

2. La derivada de la función identidad es uno
$$\frac{d}{dx}x = 1$$

3. La derivada del producto de una constante por una función (producto por un escalar)
$$\frac{d}{dx}Cu = C\frac{d}{dx}u$$

4. Regla de la suma o diferencia de funciones
$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v$$

5. Regla de las potencias simples
$$\frac{d}{dx}x^n = n\frac{d}{dx}x^{n-1}$$

6. Regla de las potencias generales
$$\frac{d}{dx}u^n = n\frac{d}{dx}u^{n-1}\frac{d}{dx}u$$

---

[7] Adaptado de Colegio de Bachilleres, 2002. Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Cálculo Diferencial e Integral I, p.p. 39-41.

7. Regla del producto de funciones

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$$

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda función, más la segunda función por la derivada de la primera función.

8. Regla del cociente de dos funciones

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, dividido todo por el denominador al cuadrado.

9. Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}v = \frac{d}{du}v\frac{d}{dx}u$$

Si $y = f\ (u)$ es una función diferenciable en u y $u = g(x)$ es una función diferenciable en x, entonces: $y = f\ [g(x)]$ es una función diferenciable en x.

Recuerda que las notaciones para la primera derivada de una función son:

$$f'(x), y', D_x f, \frac{d}{dx}f(x)$$

Reglas de derivación para funciones trascendentes

Recuerda que las funciones trascendentes son las funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica.

a) Reglas de derivación para las funciones trigonométricas
   1. Función seno $\frac{d}{dx}sen\, u = \cos u\ \frac{du}{dx}$

   2. Función coseno $\frac{d}{dx}\cos u = -\mathrm{sen}\, u\ \frac{du}{dx}$

   3. Función tangente $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\ \frac{du}{dx}$

   4. Función cotangente $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\ \frac{du}{dx}$

5. Función secante $\frac{d}{dx}\sec u = \sec\ u \tan u \frac{du}{dx}$
6. Función cosecante $\frac{d}{dx}\csc u = \csc u \cot u\ \frac{du}{dx}$

b) Reglas para derivar función exponencial e^x y e^u
1. Toda derivada e^x es igual a e^x, esto es:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

2. Si u es una función derivable en x, entonces:

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

3. Particularmente, si k es una constante, entonces:

$$\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}$$

c) Reglas para derivar funciones logarítmicas naturales
1. Derivada de la función logaritmo natural

$$\frac{d}{dx}lnx = \frac{1}{x}$$

2. Si u es una función diferenciable en x, entonces

$$\frac{d}{dx}lnu = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:
Determina la derivada de las siguientes funciones

1. $f(x) = 5$, como la función es una constante (regla 1).

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}5 = 0$$

2. $f(x) = x$, f(x) es la función identidad (regla 2).

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

3. $f(x) = 3x$, la función consiste en una constante que multiplica a una variable (regla 3).

$$\frac{d}{dx}3x = 3\frac{d}{dx}x$$

Después de aplicar la regla de una constante por una variable, se puede observar que queda pendiente la derivada resaltada en rojo, y corresponde a la derivada de la función identidad (regla 2).

$$\frac{d}{dx}3x = 3\frac{d}{dx}x$$

$$\frac{d}{dx}3x = 3(1)$$

$$\frac{d}{dx}3x = 3$$

Una vez que la expresión esté derivada completamente, se ha terminado la derivada.

4. $f(x) = \frac{7}{2}x + 5$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x + 5\right)$$

Como la función es a su vez una suma de funciones (regla 4), la derivada se separa en tantas derivadas como los sumandos que integran la suma.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x + 5\right) = \frac{d}{dx}\frac{7}{2}x + \frac{d}{dx}5$$

La primera derivada que resulta es la derivada de una constante por una variable (regla 3), que a su vez tiene que simplificarse, como la multiplicación de la constante ($7/2$ en este ejemplo) por la variable. La segunda, es la derivada de una constante (regla 1), a la cual se le puede aplicar la regla de manera directa.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x + 5\right) = \frac{7}{2}\frac{d}{dx}x + 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x + 5\right) = \frac{7}{2}x$$

5. $f(x) = x^4$, dado que la función es la potencia de una variable, se aplica la regla 5.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4$$

Regla 5, donde $n = 4$

$$\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$$

6. $f(x) = \frac{4x-1}{-4x-1}$, debido a la naturaleza de la función, inicialmente se aplicará la regla 8, donde $u = 4x - 1$ y $v = -4x - 1$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{(-4x-1)\frac{d}{dx}(4x-1) - (4x-1)\frac{d}{dx}(-4x-1)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{(-4x-1)\left(\frac{d}{dx}4x - \frac{d}{dx}1\right) - (4x-1)\left(\frac{d}{dx}(-4x) - \frac{d}{dx}1\right)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{(-4x-1)\left(4\frac{d}{dx}x - 0\right) - (4x-1)\left(-4\frac{d}{dx}x - 0\right)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{(-4x-1)(4(1)-0) - (4x-1)(-4(1)-0)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{(-4x-1)(4) - (4x-1)(-4)}{(-4x-1)^2}$$

Hasta el paso anterior, se terminó el proceso de derivación, a continuación, se simplificará el resultado.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{(-16x-4) - (-16x+4)}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{-16x-4+16x-4}{(-4x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{-4x-1}\right) = \frac{-4}{(-4x-1)^2}$$

7. $f(x) = (4x+5)^3$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3 = 3(4x+5)^2\frac{d}{dx}(4x+5)$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3 = 3(4x+5)^2\left[\frac{d}{dx}4x + \frac{d}{dx}5\right]$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3 = 3(4x+5)^2\left[\frac{d}{dx}4x + 0\right]$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3 = 3(4x+5)^2\left[4\frac{d}{dx}x + 0\right]$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3 = 3(4x+5)^2(4)$$

$$\frac{d}{dx}(4x+5)^3 = 12(4x+5)^2$$

Derivadas de orden superior o sucesivas

El resultado de la derivada de una función es otra función, por lo tanto, es susceptible a ser derivada, al resultado se le llama segunda derivada. Este resultado puede ser derivado, es decir, obtener derivadas sucesivas.

Para obtener la segunda derivada, se utilizan las mismas reglas y procedimientos expuestos anteriormente. Las notaciones para la segunda derivada de una función son:

$$f''(x), y'', \frac{d^2}{dx^2}y,\ D_x^2 f, \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

Ejemplos:
Obtén la segunda derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 4$
   Aplicando la regla 4,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(5x^4 - 3x^2 + 2x - 4)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}5x^4 - \frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}2x - \frac{d}{dx}4$$

Aplicando la regla 3, 1

$$\frac{d}{dx}f(x) = 5\frac{d}{dx}x^4 - 3\frac{d}{dx}x^2 + 2\frac{d}{dx}x - 0$$

Aplicando la regla 5 y la regla 2

$$\frac{d}{dx}f(x) = 5(4x^{4-1}) - 3(2x^{2-1}) + 2(1) - 0$$

Simplificando la expresión:

$$\frac{d}{dx}f(x) = 20x^3 - 6x + 2$$

Esta es la expresión de la primera derivada, para determinar la segunda derivada se derivará esta expresión.

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}(20x^3 - 6x + 2)$$

Aplicando la regla 4:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}20x^3 - \frac{d}{dx}6x + \frac{d}{dx}2$$

Aplicando la regla 3 y 1

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 20\frac{d}{dx}x^3 - 6\frac{d}{dx}x + 0$$

Aplicando la regla 5 y 2

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 20(3x^{2-1}) - 6(1)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 60x - 6$$

En esta sección desarrollarás actividades que te permitirán ejercitar los aprendizajes esperados**.**

Actividad 1

Aplicando las reglas correspondientes, determina las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 5$

2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$

4. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$

5. $f(x) = (x + 1)(x - 1)$

6. $f(x) = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$

7. $f(x) = (2x - 1)(4x^3 + 8x)$

8. $f(x) = \frac{5x}{x+3}$

9. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x-2}$

10. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

11. $f(x) = (2x^2 - 3)^2$

12. $f(x) = e^{2x}$

Actividad 2

Determina la segunda derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^4 + 3x$

2. $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

3. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x$

4. $f(x) = 3x^{-5} + 2x^{-3} + 2x^2$

5. $f(x) = 2x^{-1} - 4x^{-3} + 5x^3$

¿QUIERES CONOCER MÁS?

Recomendaciones de textos que te permitirán consultar, estudiar y ampliar tus conocimientos sobre los contenidos específicos de la guía.

- Fuenlabrada de la Vega, S. (2001) Cálculo Diferencial. 2ª edición. México Mc Graw Hill Interamericana.
- Larson, R., Edwards, R. (2005) Cálculo Diferencial e Integral. 7ª edición. México, Mc Graw Hill Interamericana.
- Jiménez, R. (2008) Cálculo Diferencial. 1ª edición. México, Pearson educación.
- Curso en video para derivar funciones desde cero https://www.youtube.com/playlist?list=PLEwR-RTQiRPWJncrcZbFKJb7Xtx0O1yKx
- Explicación de reglas de derivación, iniciando desde lo más simple https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-6a/v/derivative-properties-and-polynomial-derivatives
- Regla de la potencia https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-5/v/power-rule
- Reglas básicas de derivación https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-6a/v/derivative-properties-and-polynomial-derivatives
- Regla del producto https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-8/v/applying-the-product-rule-for-derivatives
- Regla del cociente https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-9/v/quotient-rule
- Texto con explicaciones, ejemplos y ejercicios de derivación. Unidad 2. Función derivada https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/calculo_I.pdf

Fuentes CONSULTADAS

1. Fuenlabrada de la Vega, S. (2001) Cálculo Diferencial. 2ª edición. México Mc Graw Hill Interamericana.
2. Larson, R., Edwards, R. (2005) Cálculo Diferencial e Integral. 7ª edición. México, Mc Graw Hill Interamericana.
3. Jiménez, R. (2008) Cálculo Diferencial. 1ª edición. México, Pearson educación.
4. Guía para el examen de Matemáticas IV. 2019. Colegio de Bachilleres, Plantel 8 Cuajimalpa. https://drive.google.com/file/d/10Usemj2hFtX0eB35BZNHTXi6nnUz3LhX/vie
5. Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92). Cálculo Diferencial e Integral I. 2002. Colegio de Bachilleres https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/wp-content/material/guias/calculo_I.pdf

Autoevaluación

Responde correctamente las siguientes actividades, en los casos que requieran procedimiento escríbelo detalladamente y argumenta tus respuestas.

1. Grafica las siguientes funciones polinomiales, a partir de su gráfica

a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 8$

b) $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$

c) $h(x) = -2x^3 + 9x^2 - 8x$

2. Realiza las operaciones que se te solicitan en cada caso.

   Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 4$

   a) $f(x) + g(x)$
   b) $f(x) - g(x)$
   c) $f(x) \cdot g(x)$
   d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

3. Determina la derivada de las siguientes funciones

a) $f(x) = 3x^5 - 6x^3 + 3x - 5$

b) $f(x) = \frac{6x+2}{x+1}$

c) $f(x) = (x+2)(x-5)$

d) $f(x) = 3e^{4x} + 5$

e) $f(x) = 4\tan 2x + 6x$

4. Determina la segunda derivada de las siguientes funciones

a) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - 2$

b) $f(x) = 4e^{3x}$

c) $f(x) = 7sen\ 2x + 1$

d) $f(x) = e^{x^3}$

e) $f(x) = 4x^{-2} - 6x^4 + 4x^2$